固定 $N = 100, K = 6$：扫描 dst 调节第二峰（对比 $\mathrm{src} = n_0 + 5$ 与 $\mathrm{src} = n_0$；解析 + flux 验证 + Monte Carlo）

1 目标

在论文的起点/终点设定下固定 $(N, K) = (100, 6)$，只改变有向 shortcut 的**指向终点** dst，观察解析 second peak 的**出现时间与相对显著性（峰高比）**随 dst 的变化，并用 Monte Carlo 统计：**吸收时间落在第二峰附近**的轨迹中，shortcut 穿越次数的比例趋势。

2 固定设定（公共参数 + 两种 src）

- 节点编号：$1, \ldots, N$。
- 起点：$n_0 = 1$。
- 吸收点：target $= N/2 = 50$（$\rho = 1$，严格 first-passage）。
- ring：$K = 6$ 邻居（$\pm 1, \pm 2, \pm 3$）。
- 有向 shortcut：从 src（source，shortcut 源点）指向 dst（destination，shortcut 指向终点），dst 作为扫描变量。
- 本报告对比两种 src：
  - Case A（论文原始设定）：$\mathrm{src} = n_0 + 5 = 6$。
  - Case B（替代设定）：$\mathrm{src} = n_0 = 1$。
- 备注：部分代码/图中使用 “scr” 表示 src（source）。

3 主要结论

- 固定 $N = 100, K = 6, n_0 = 1, \mathrm{target} = 50$，只扫描 dst 会显著改变双峰的**峰位置**（t_1, t_2）以及第二峰的**相对显著性**（峰高比 $R = A(t_2)/A(t_1)$）。
- 用 flux/master equation 做确定性扫描可复现 “存在双峰” 的 dst 区间，并与 AW 反演在 $t \le 2000$ 内一致（代表点最大误差量级约 10^{-13}），说明双峰不是数值噪声伪影。
- 对典型的 late-second-peak 族（t_2 在较晚时间尺度出现），除特殊点（如 dst = target）外，$A(t_2)$ 的**绝对高度随** dst **的变化幅度很小**；更重要、变化更显著的是 R。
- 在 late-second-peak 族中，第二峰窗口内的穿越概率 $P(C \ge 1 \mid T \in W)$ 与 $A(t_2)$ 呈正相关，但由于 $A(t_2)$ 的动态范围较小，更清晰的组织变量是峰高比 R（排除 dst = target 后，经验上 R 越大，$P(C \ge 1 \mid T \in W)$ 越小）。

- Case B（src $= n_0$）会额外出现 early-t_2：当 dst 接近 target 时存在两步吸收路径，使窗口内几乎必经 shortcut（$P(C \geq 1 \mid T \in W) \approx 1$），需要与 late-second-peak 分开理解。
- Case A（src $= n_0+5$）的第一/第二峰通常是更平滑的 late-time 结构（相对不受 early-peak 的“近 delta”结构干扰），因此在第二峰窗口条件下估计的穿越比例更稳定、也更有信息量（$C = 0, 1, \geq 2$ 的质量分布更可区分）。

4 第二峰判据与 MC 条件

- 峰值判据沿用 Fig. 3 caption 规则：局部极大、$A(t) > 10^{-7}$；第二峰需至少达到最高峰的 1%。
- $A(t)$ 是离散时间 first-passage 的概率质量函数（PMF），因此图上连线看起来“尖”是正常现象（不是连续曲线）。
- 记前两个峰为 (t_1, t_2)。定义第二峰窗口半宽

$$\Delta = \max\{1, \lfloor 0.05\,(t_2 - t_1)\rfloor\},$$

  并在 MC 中筛选吸收时间 $T \in [t_2 - \Delta,\ t_2 + \Delta]$ 的轨迹，统计 shortcut 穿越次数 C（0 次、1 次、≥ 2 次）。

5 统计量与比例定义

5.1 核心随机变量（轨迹级 (T, C)）

- T：first-passage 吸收时间（首次到达 target 的时间步数；$\rho = 1$）。
- C：shortcut 穿越次数（本模型里等价于走过边 src $\to$ dst 的次数）。

5.2 第二峰窗口条件与“穿过/没穿过”的比例

- 用解析 $A(t)$ 定位双峰的第二峰时间 t_2，并定义窗口 $W = [t_2 - \Delta,\ t_2 + \Delta]$。
- 在 MC 中只保留满足 $T \in W$ 的轨迹集合 $\mathcal{S}$（也就是“第二峰附近被吸收”的那一群）。
- “未穿越/已穿越”的比例可定义为

$$P(C = 0 \mid T \in W), \qquad P(C \geq 1 \mid T \in W) = 1 - P(C = 0 \mid T \in W).$$

  另外也统计 $P(C = 1 \mid T \in W)$ 与 $P(C \geq 2 \mid T \in W)$。

5.3 MC 估计与误差

- 设窗口内样本数为 $n = |\mathcal{S}|$，其中 k_0 条满足 $C = 0$，则

$$\widehat{P}(C = 0 \mid T \in W) = k_0/n, \quad \widehat{P}(C \geq 1 \mid T \in W) = 1 - k_0/n.$$

- 误差条：把“是否穿过”（$C \geq 1$）视为二项分布，对 $\widehat{P}(C \geq 1 \mid T \in W)$ 画 Wilson 95% 置信区间（脚本已自动画在图里）。
- 质量检查：同时记录窗口内比例 n/N_{walkers}，若 n 太小（比如 $< 10^3$）应增大 walker 数或调整窗口定义，否则误差会很大。

6 确定性验证：flux/master equation 扫描 + AW 交叉核对

6.1 方法概述（flux/master equation）

把 target 视为吸收态，维护未吸收概率质量 $p_t(i)$ 并做确定性的时域推进：

$$f(t+1) = p_{t+1}(\text{target}), \qquad p_{t+1}(j) = \sum_i p_t(i) P(i \to j),\ j \neq \text{target}.$$

实现上用有向边列表 $(\text{src}, \text{dst}, w)$（$w = 1/\deg(\text{src})$）做一次稀疏推进，避免构造稠密 $(N \times N)$ 矩阵。该方法无随机性，主要用于验证“双峰”不是 MC 噪声或 AW 反演伪影。

6.2 双峰判据（Fig. 3 + separation）

- Fig. 3 caption 风格：严格局部极大、$f(t) > 10^{-7}$；第二峰高度需 $\geq 1\%$ 的最高峰。
- separation/robust：在上述基础上，要求两峰至少相隔 $2K = 12$，以排除“很早的近邻峰簇”。
- 谷深度指标（诊断量）：设 $h_{\min} = \min\{f(t_1), f(t_2)\}$，定义

$$V = \frac{\min_{t_1 < t < t_2} f(t)}{h_{\min}}.$$

$V \approx 1$ 表示两峰间谷很浅。

6.3 扫描结果（Case A：src = 6）

固定 $(N, K, n_0, \text{target}) = (100, 6, 1, 50)$ 扫描 dst：

- Fig. 3 规则找到 15 个双峰 dst（43–57，含特殊点 dst = target = 50）。
- separation/robust 过滤后保留 14 个：$\text{dst} \in \{43, \ldots, 49, 51, \ldots, 57\}$。

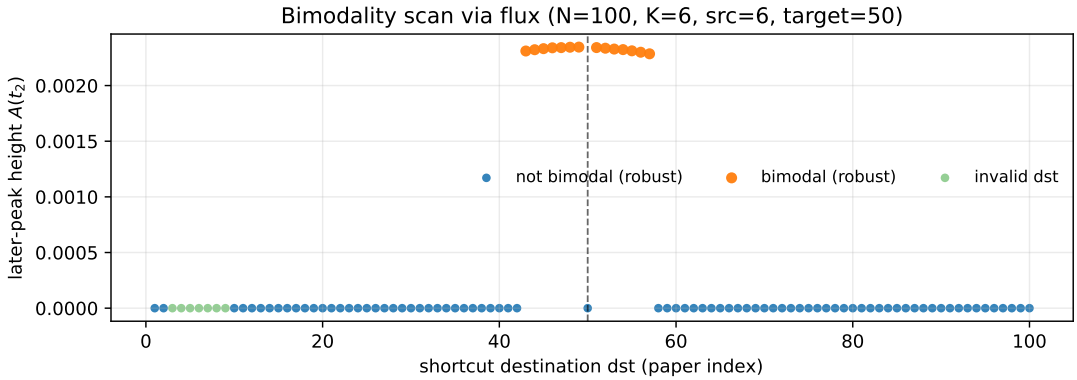


图 1: Case A：flux/master equation 扫描 dst 的双峰结果与 $A(t_2) = f(t_2)$。虚线为 dst = target = 50。

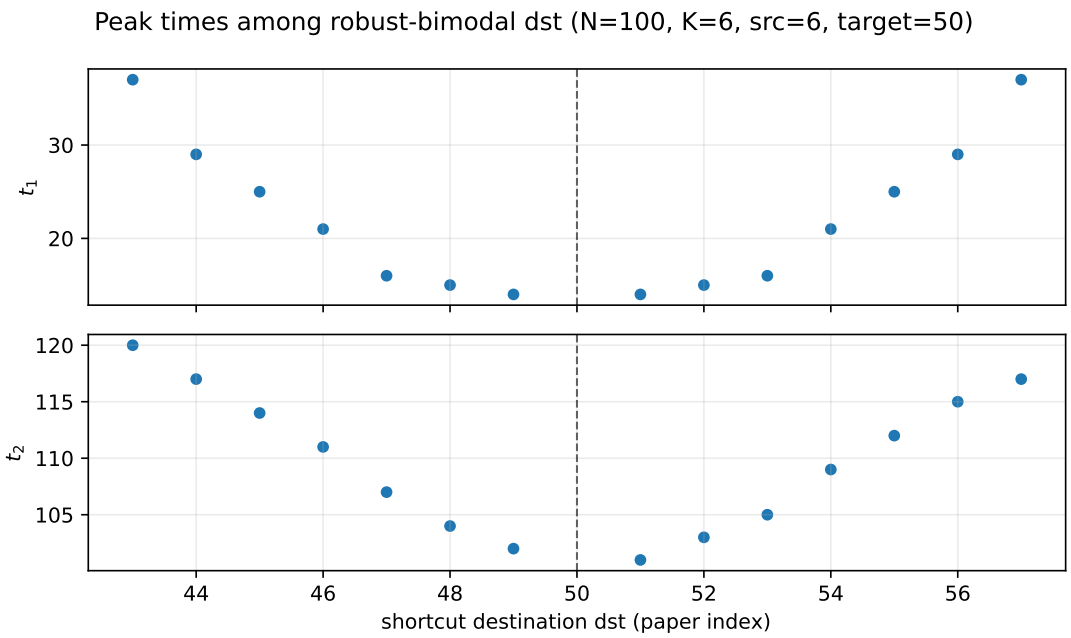


图 2: Case A：robust 双峰样本的峰出现时间 t_1, t_2 随 dst 的变化。

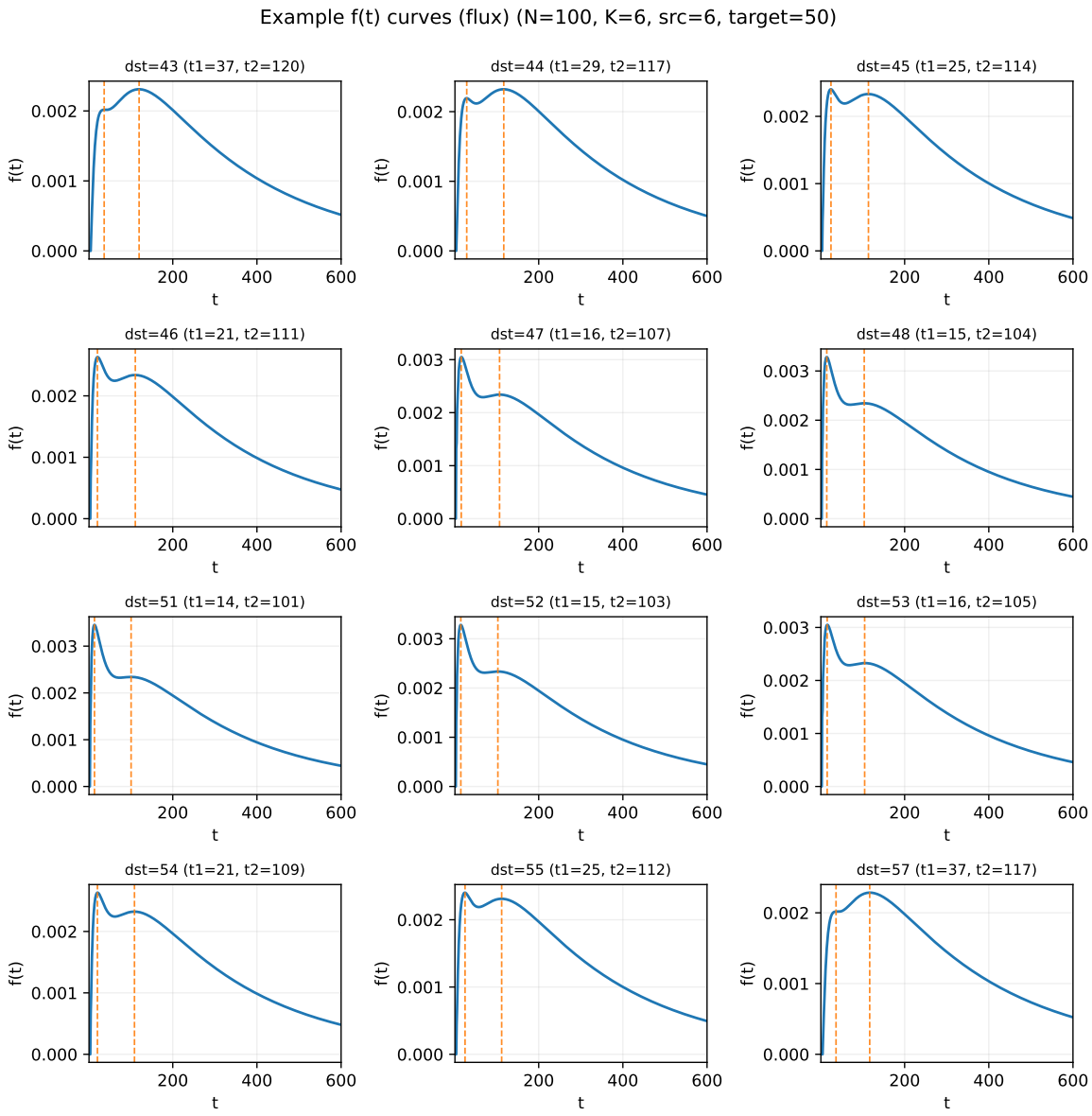


图 3: Case A：若干 robust 双峰样本的 $f(t)$（flux），并标注 t_1, t_2。

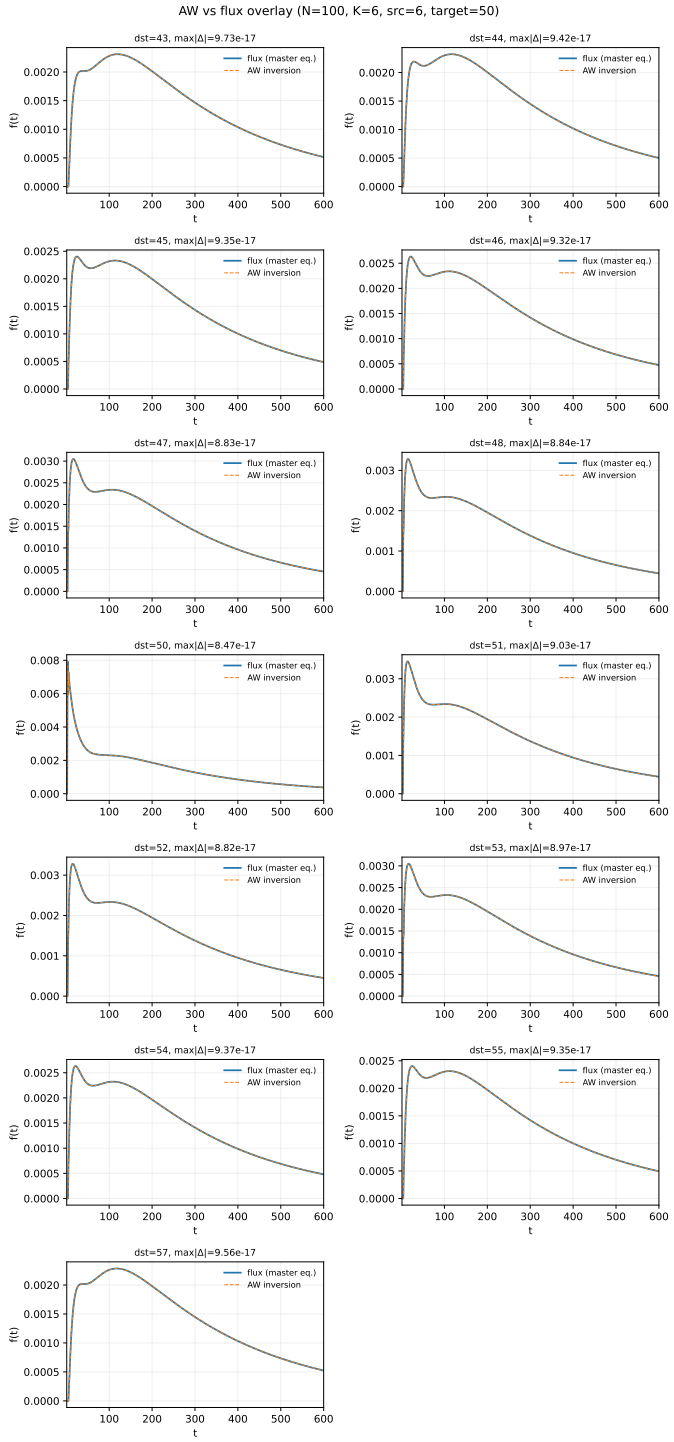


图 4: Case A：AW 反演与 flux 的 $f(t)$ 叠加对比（代表 dst）。最大误差量级约 10^{-13}。

dst	t_1	t_2	$t_2 - t_1$	$A(t_1)$	$A(t_2)$	V
43	37	120	83	0.00201691	0.00231041	1.000
44	29	117	88	0.00219366	0.00232199	0.965
45	25	114	89	0.00240315	0.00233158	0.940
46	21	111	90	0.00263207	0.00233914	0.960
47	16	107	91	0.00304909	0.00234085	0.979
48	15	104	89	0.00328311	0.00234431	0.987
49	14	102	88	0.00345483	0.00234556	0.992
51	14	101	87	0.00345483	0.0023412	0.993
52	15	103	88	0.00328311	0.00233559	0.989
53	16	105	89	0.00304909	0.00232787	0.982
54	21	109	88	0.00263207	0.00232303	0.965
55	25	112	87	0.00240315	0.00231205	0.947
56	29	115	86	0.00219365	0.00229944	0.965
57	37	117	80	0.0020168	0.00228525	0.999

6.4 扫描结果（Case B：src = 1）

- Fig. 3 规则找到 18 个双峰 dst；其中相当一部分是早期峰簇（峰间距小于 $2K$）。
- 经过 separation 与 robust 两步筛选后，保留 7 个更典型的晚到第二峰样本。
- 对应 dst $\in \{36, 37, 38, 39, 62, 63, 64\}$。

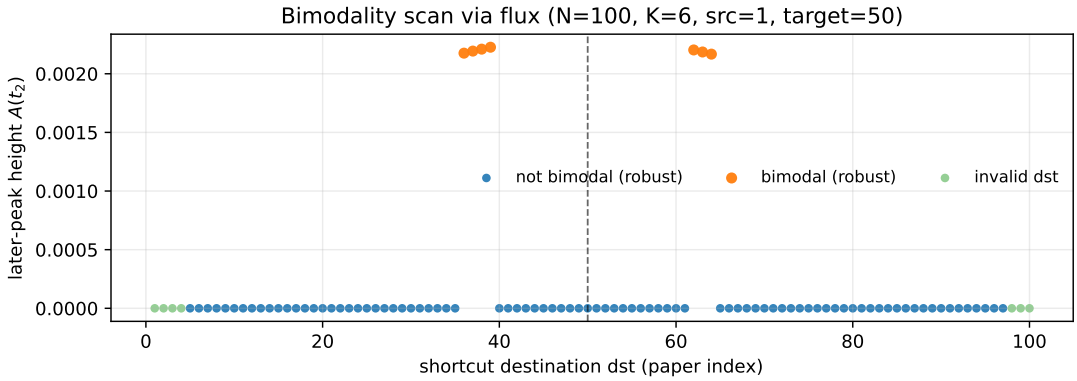


图 5: Case B：flux 扫描 dst 的 $A(t_2) = f(t_2)$，并标出 robust 双峰点。

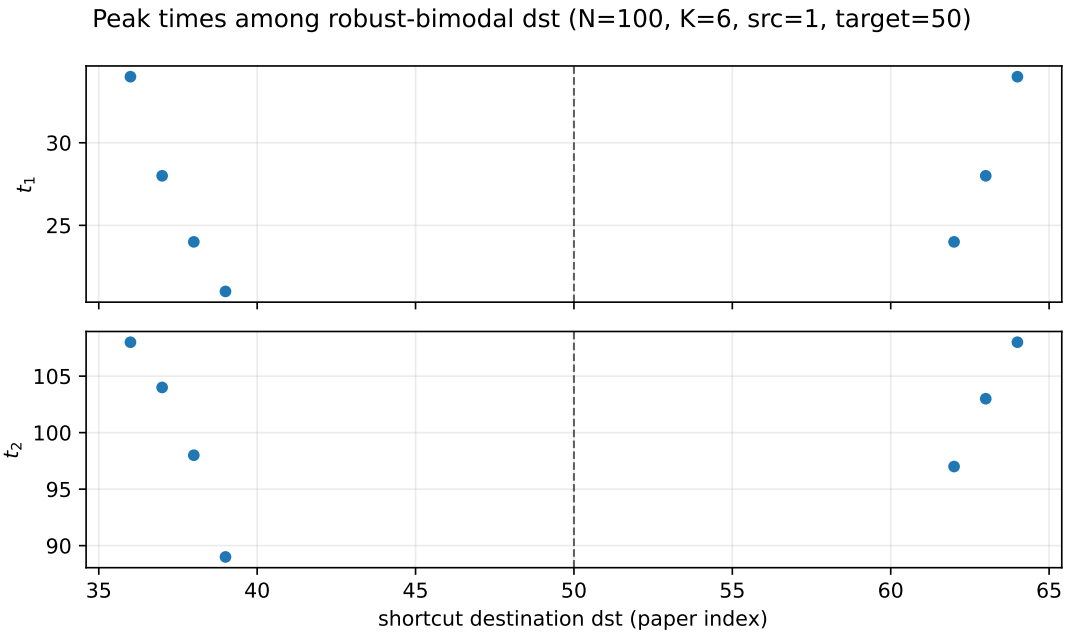


图 6: Case B：robust 双峰样本的峰出现时间 t_1, t_2 随 dst 的变化。

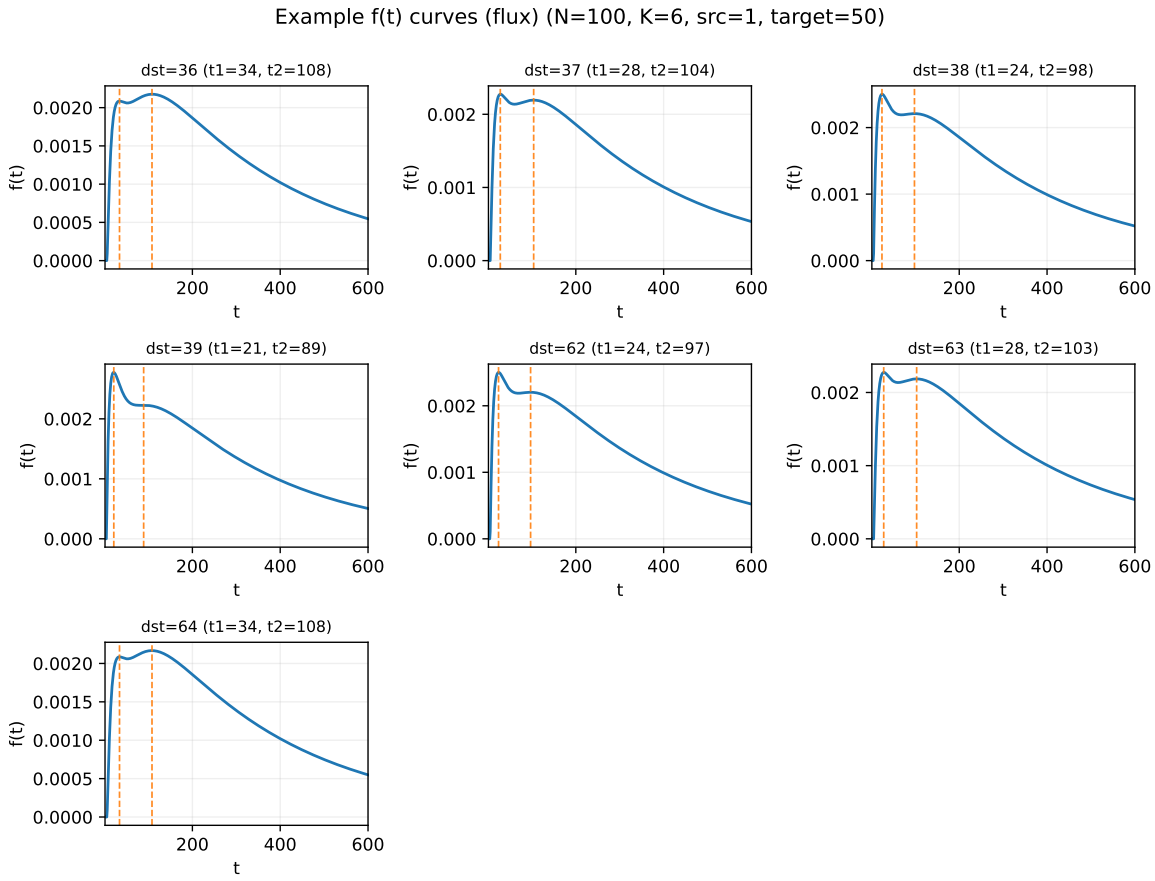


图 7: Case B：若干 robust 双峰样本的 $f(t)$（flux），并标注 t_1, t_2。

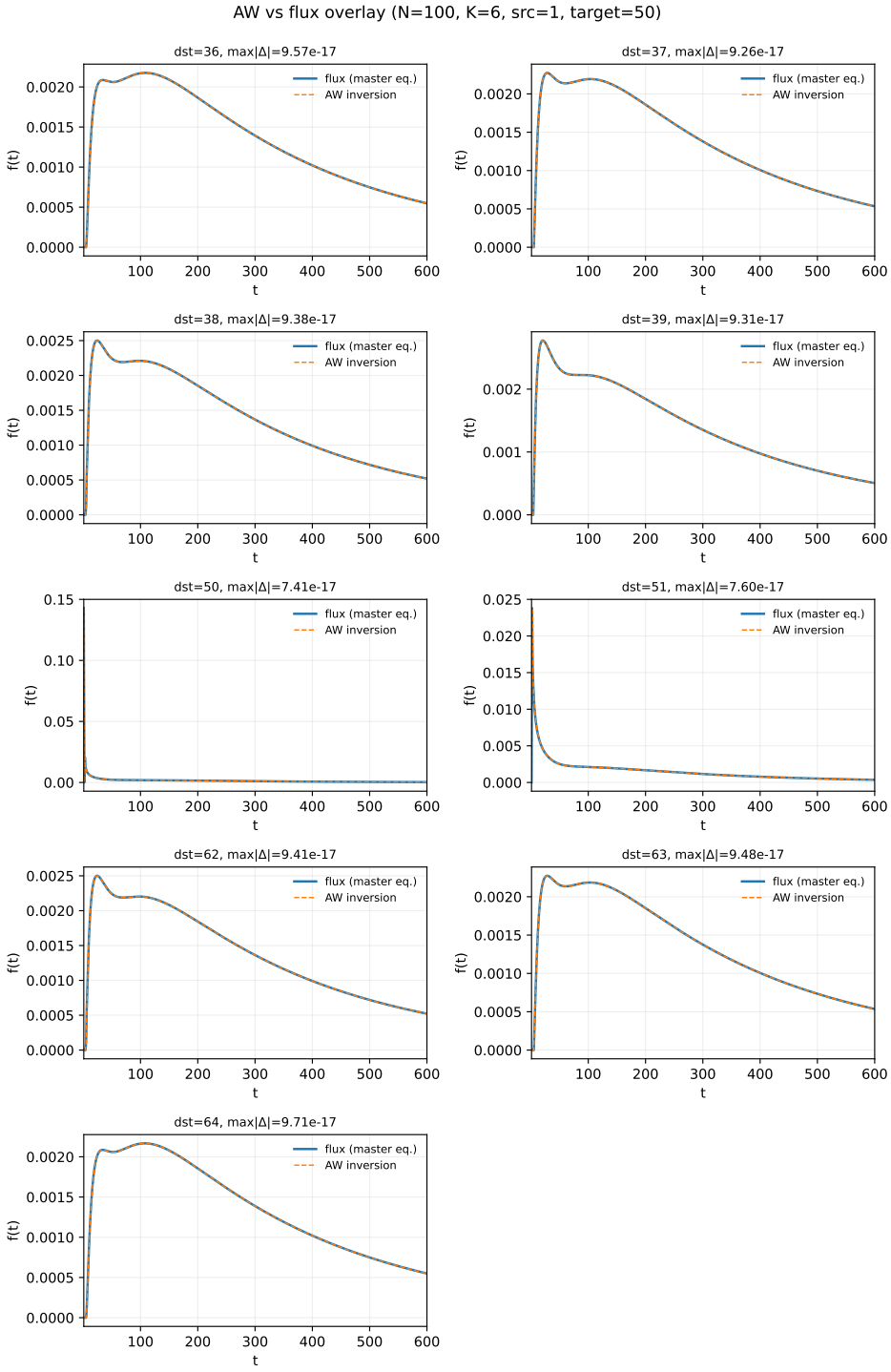


图 8: Case B：AW 反演与 flux 的 $f(t)$ 叠加对比（代表 dst）。最大误差量级约 10^{-13}。

dst	t_1	t_2	$t_2 - t_1$	$A(t_1)$	$A(t_2)$	V
36	34	108	74	0.00208676	0.00217576	0.988
37	28	104	76	0.00227434	0.0021934	0.975
38	24	98	74	0.00250164	0.00220997	0.992
39	21	89	68	0.00277427	0.00222632	1.000
62	24	97	73	0.00250164	0.00220303	0.993
63	28	103	75	0.00227434	0.00218569	0.977
64	34	108	74	0.00208671	0.00216745	0.987

6.5 复现命令（flux 扫描）

- Case A：`python3 code/bimodality_flux_scan.py --sc-src 6 --aw-check`
- Case B：`python3 code/bimodality_flux_scan.py --sc-src 1 --aw-check`

7 结果：Case A（论文原始设定 src $= n_0 + 5 = 6$）

7.1 MC 覆盖范围

- 本次参数：$N = 100$, $K = 6$, $n_0 = 1$, target $= 50$, src $= 6$。
- 满足双峰判据（Fig. 3 规则）的 dst：共 15 个，范围 43–57。
- 特殊点：dst $=$ target $= 50$ 会使 shortcut 直接连到吸收点，导致窗口很早且 $P(C \geq 1)$ 接近 1。

7.2 解析：第二峰高度随 dst 变化

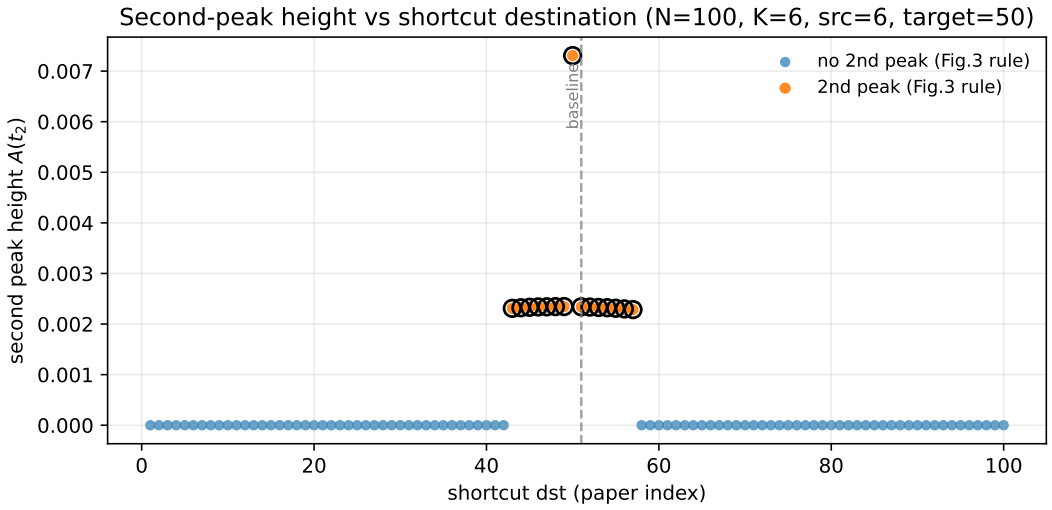


图 9: 解析（AW 反演）得到的第二峰高度 $A(t_2)$ 随 shortcut 终点 dst 的变化。

7.3 双峰配置的峰出现时间（t_1 与 t_2）

7.4 晚双峰（late second peak）机制解释（Case A）

- Case A 中 src $\neq n_0$：轨迹必须先到达 src $= 6$ 才能使用 shortcut，因此 shortcut 影响通常出现在更晚的时间尺度上。

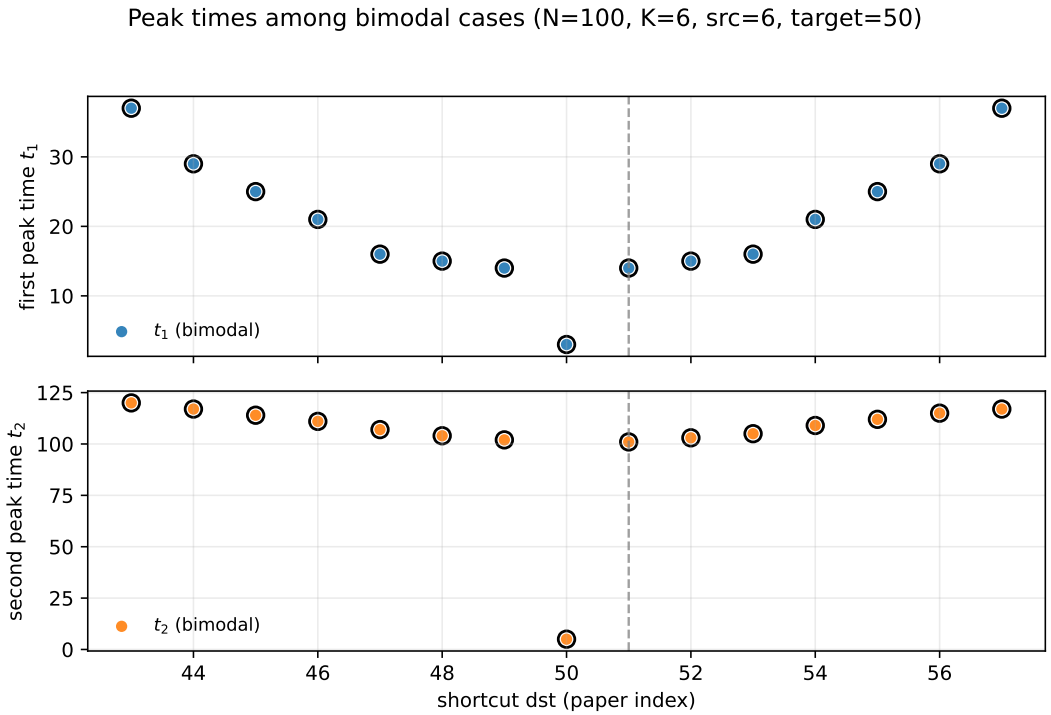


图 10: 仅对满足双峰判据（Fig. 3 规则）的 dst，给出第一峰时间 t_1 与第二峰时间 t_2 随 dst 的变化。

- 双峰可理解为两类轨迹的混合：一类较早经过 src 并使用 shortcut（更快到达 target，贡献第一峰 t_1）；另一类在较长时间内未有效利用 shortcut（或很晚才利用），在 $t_2 \sim O(N)$ 的尺度上形成第二峰。
- 极端点 dst = target 会把 shortcut 直接连到吸收点，导致非常早的峰结构，需要与典型 late-second-peak 分开理解。

7.5 解析基准：选取案例的 $A(t)$ 与第二峰窗口

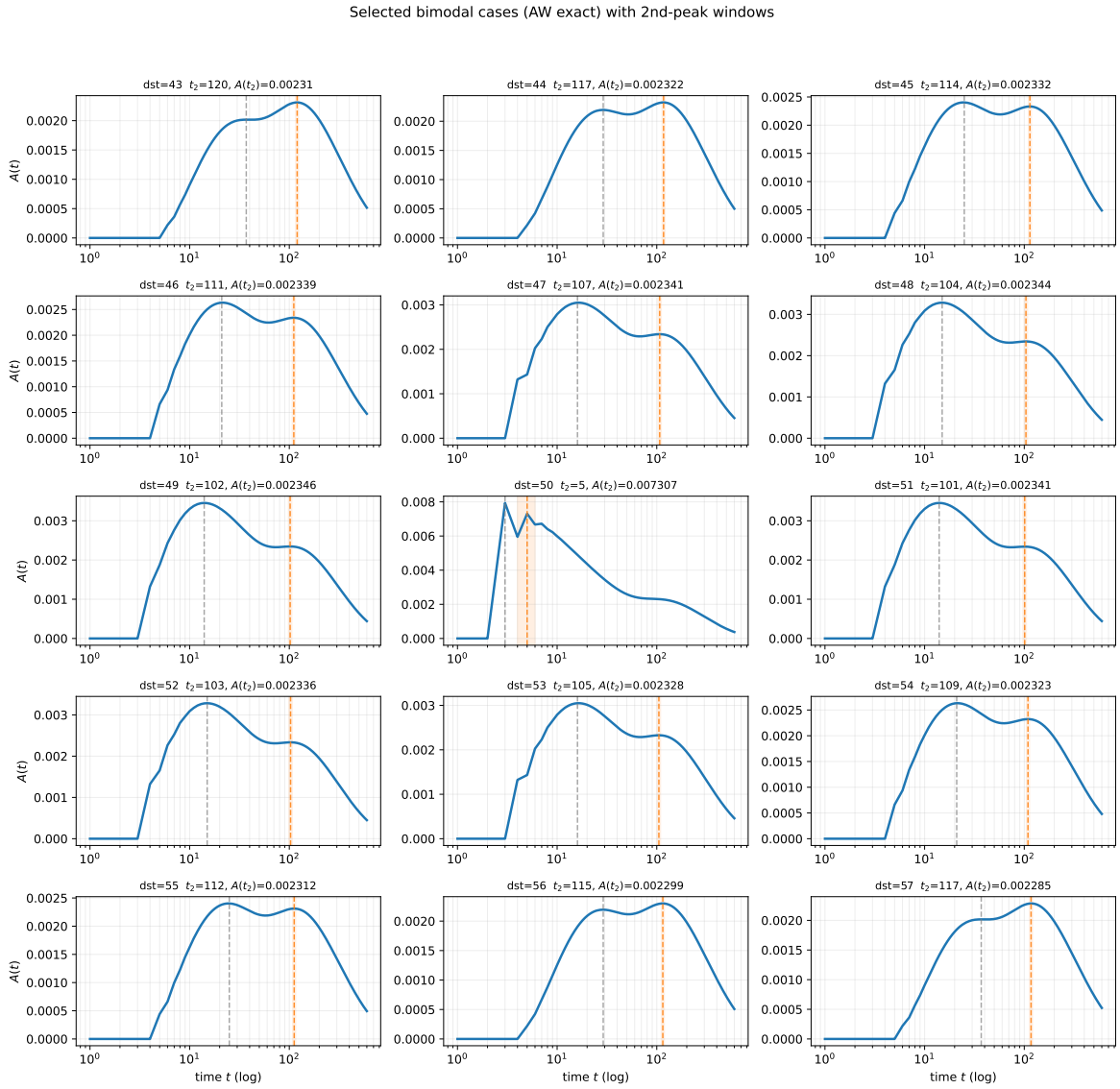


图 11: 所有满足双峰判据的 dst：解析 $A(t)$ 曲线（AW 反演），橙色阴影为第二峰窗口 $[t_2 - \Delta, t_2 + \Delta]$。

7.6 MC：第二峰窗口内的 shortcut 穿越比例

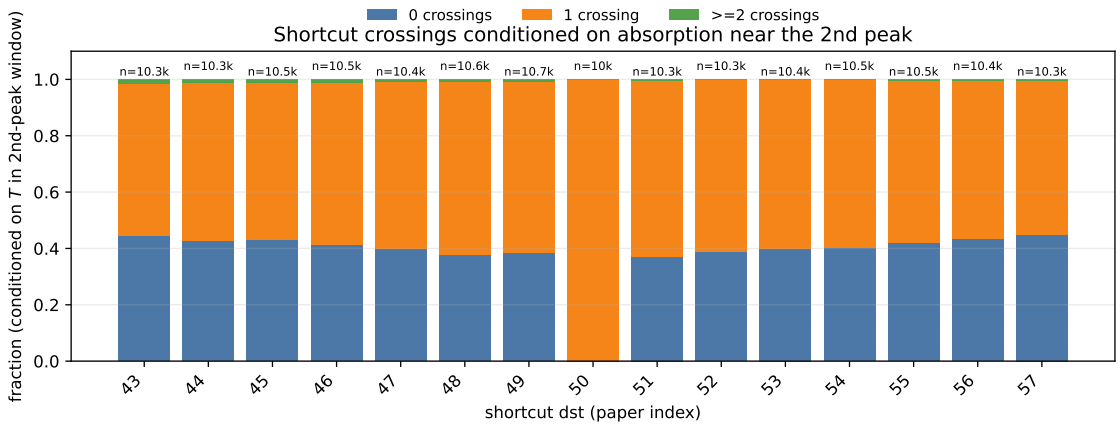


图 12: 对每个 dst，在 $T \in [t_2 - \Delta, t_2 + \Delta]$ 条件下统计穿越次数 C：0 次、1 次、≥ 2 次的比例（堆叠柱）。柱顶标注窗口内样本数 n。

7.7 分析：第二峰/第一峰相对高度 vs 穿越比例

定义峰高比 $R = A(t_2)/A(t_1)$，关心 $P(C \geq 1 \mid T \in [t_2 - \Delta, t_2 + \Delta])$ 随 R 的变化（同时也画出随 $A(t_2)$ 的变化）。

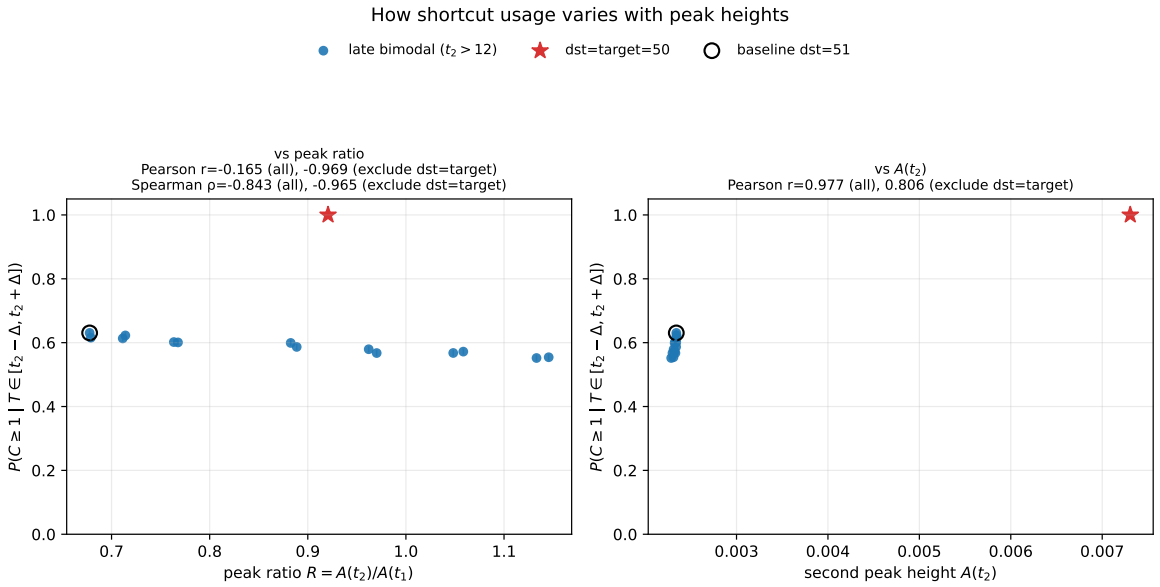


图 13: 左：穿越概率随峰高比 R 的变化；右：随第二峰绝对高度 $A(t_2)$ 的变化。误差条为 Wilson 95% 置信区间；颜色区分 early/late（以 $t_2 \leq 2K$ 为 early；Case A 基本都为 late）；红色星号为 dst = target 的特殊情形。

7.7.1 相关性（脚本自动统计）

- Pearson $r(R,\ P(C \geq 1))$：-0.165（全体），-0.969（去掉 dst = target）。
- Spearman $\rho(R,\ P(C \geq 1))$：-0.843（全体），-0.965（去掉 dst = target）。

- Pearson $r(A(t_2),\ P(C \geq 1))$：0.977（全体），0.806（去掉 dst = target）。
- （等价）Pearson $r(A(t_2),\ P(C = 0))$：-0.977（全体），-0.806（去掉 dst = target）。
- (late-only：$t_2 > 12$) Pearson $r(A(t_2),\ P(C \geq 1))$：0.806；Pearson $r(R,\ P(C \geq 1))$：-0.969。

7.7.2 结论要点（Case A，src = 6）

- **典型双峰：**除 dst = target 外，Case A 的双峰主要是 late-second-peak（t_2 在较晚时间出现）。
- **穿越比例：**在第二峰窗口条件下，仍有可观 “0 crossing” 的比例（并非几乎必经 shortcut），反映 second peak 对应的是一类更慢的混合轨迹群体。
- **随第二峰高度与峰高比：**$A(t_2)$ 与 $P(C \geq 1 \mid T \in W)$ 统计上呈正相关（见 $r(A(t_2), P(C \geq 1)) > 0$），但除特殊点外 $A(t_2)$ 的变化幅度很小；排除 dst = target 后，更清晰的趋势是 R 与 $P(C \geq 1 \mid T \in W)$ 呈负相关。
- **特殊点：**dst = target 会使 t_2 很早且 $P(C \geq 1)$ 接近 1，需要与典型 late-second-peak 分开讨论。

7.8 汇总表

dst	t_1	t_2	Δ	R	$A(t_1)$	$A(t_2)$	$P(C = 0)$	$P(C \geq 1)$
43	37	120	4	1.146	0.0020160646	0.00231041	0.446	0.554
44	29	117	4	1.059	0.0021926251	0.00232199	0.428	0.572
45	25	114	4	0.970	0.0024036907	0.00233158	0.432	0.568
46	21	111	4	0.889	0.0026312025	0.00233914	0.413	0.587
47	16	107	4	0.768	0.0030482422	0.00234085	0.399	0.601
48	15	104	4	0.714	0.0032836275	0.00234431	0.377	0.623
49	14	102	4	0.679	0.0034545803	0.00234556	0.384	0.616
50	3	5	1	0.921	0.0079321716	0.00730663	0.000	1.000
51	14	101	4	0.678	0.0034530973	0.0023412	0.369	0.631
52	15	103	4	0.711	0.0032842321	0.00233559	0.387	0.613
53	16	105	4	0.763	0.0030519913	0.00232787	0.398	0.602
54	21	109	4	0.883	0.0026314043	0.00232303	0.401	0.599
55	25	112	4	0.962	0.0024021309	0.00231205	0.421	0.579
56	29	115	4	1.048	0.0021939313	0.00229944	0.432	0.568
57	37	117	4	1.133	0.0020169903	0.00228525	0.448	0.552

8 结果：Case B（src = $n_0 = 1$）

8.1 MC 覆盖范围

- 本次参数：$N = 100$, $K = 6$, $n_0 = 1$, target = 50, src = 1。
- 满足双峰判据（Fig. 3 规则）的 dst：共 18 个，范围 36–64。
- 特殊点：dst = target = 50 会使 shortcut 直接连到吸收点，导致窗口很早且 $P(C \geq 1)$ 接近 1。

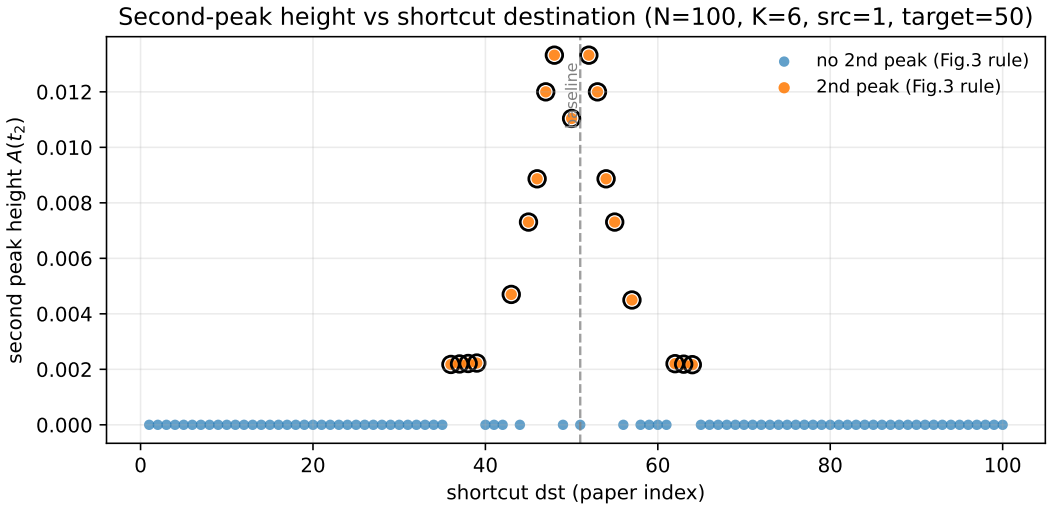


图 14: 解析（AW 反演）得到的第二峰高度 $A(t_2)$ 随 shortcut 终点 dst 的变化。

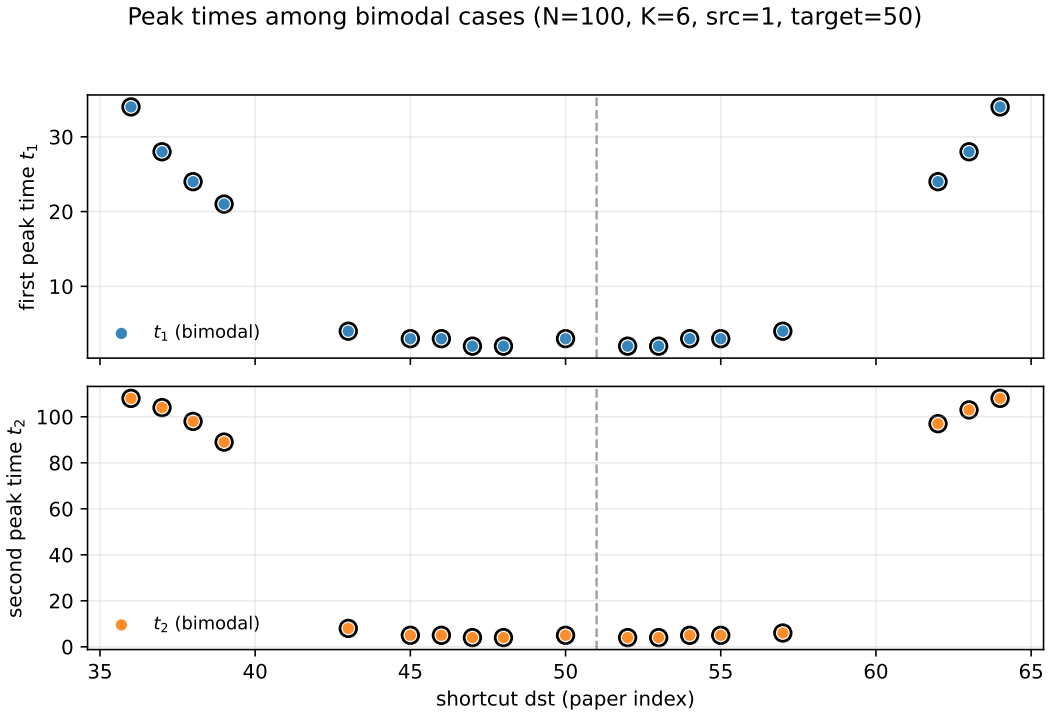


图 15: 仅对满足双峰判据（Fig. 3 规则）的 dst，给出第一峰时间 t_1 与第二峰时间 t_2 随 dst 的变化。

8.2 解析：第二峰高度随 dst 变化

8.3 双峰配置的峰出现时间（t_1 与 t_2）

8.4 为什么部分“第二峰”出现在很早的时间？(Case B 的直接后果)

- 当 src $= n_0$ 时，粒子从第 1 步起就有概率 $1/(K+1) = 1/7$ 直接走 shortcut：$n_0 \to$ dst。
- 若 dst 恰好离吸收点很近（在 $K = 6$ ring 上一步可达，即 dst $\in \{\text{target} \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$），那么存在极短路径

$$n_0 \xrightarrow{\text{shortcut}} \text{dst} \xrightarrow{\text{ring}} \text{target},$$

  从而在 $t = 2$ 就出现很大的吸收概率，形成非常早的主峰/次峰结构（并且这些早峰对应的轨迹几乎必经 shortcut）。
- 这些早峰不是“噪声”：对典型 early-t_2 案例（例如 dst $= 47$）用 master equation 精确传播核对，AW 反演与数值精确结果在前 200 步的最大误差约为 10^{-14}，峰的位置与高度一致。

8.5 晚双峰（late second peak）机制解释（Case B）

- Case B 中也会出现 late-second-peak：当 shortcut 把粒子送往远离 target 的区域（例如 dst 在 ring 上离 target 很远）时，早期使用 shortcut 反而更可能延迟到达 target。
- 这会把轨迹分成两类：一类未早用 shortcut 或未被其显著“拉远”（形成较早的 t_1）；另一类早用 shortcut 后被“甩开”（形成较晚的 t_2），从而出现双峰。
- 在这些 late-t_2 案例中，第二峰窗口条件下通常 $P(C \geq 1 \mid T \in W) \approx 0.63$–$0.72$，仍存在明显的“0 crossing”（说明第二峰并非全由必经 shortcut 的轨迹构成）。

8.6 解析基准：选取案例的 $A(t)$ 与第二峰窗口

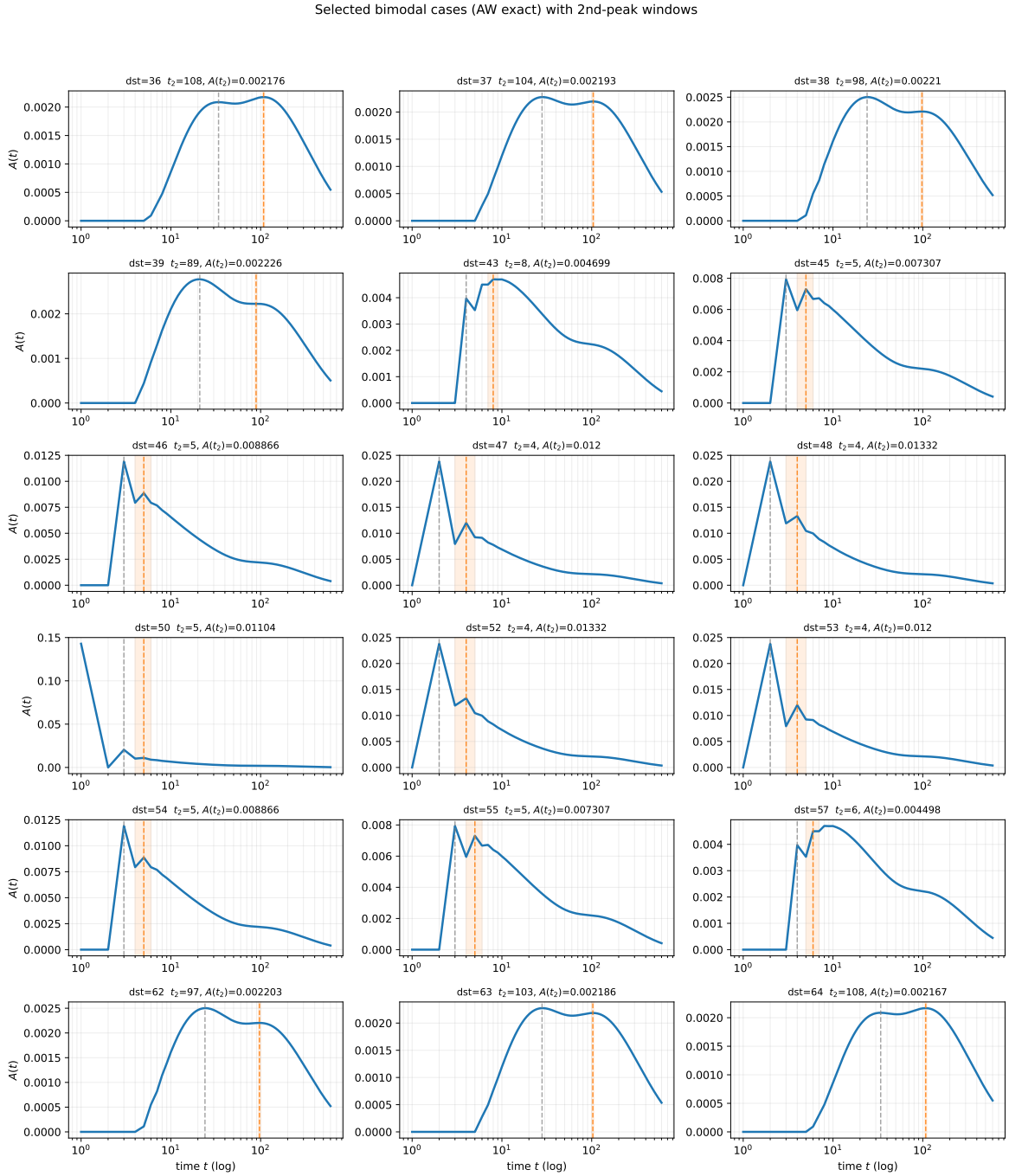


图 16: 所有满足双峰判据的 dst：解析 $A(t)$ 曲线（AW 反演），橙色阴影为第二峰窗口 $[t_2 - \Delta, t_2 + \Delta]$。

8.7 MC：第二峰窗口内的 shortcut 穿越比例

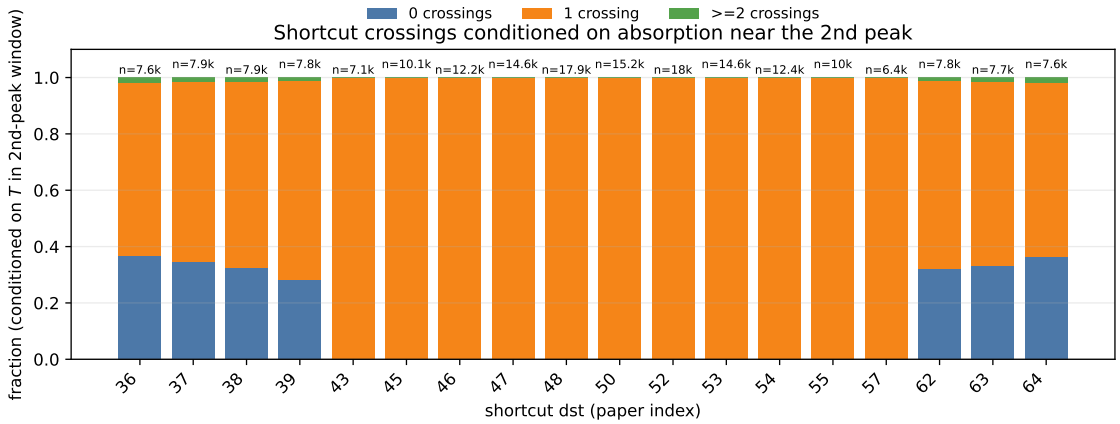


图 17: 对每个 dst，在 $T \in [t_2 - \Delta, t_2 + \Delta]$ 条件下统计穿越次数 C：0 次、1 次、≥ 2 次的比例（堆叠柱）。柱顶标注窗口内样本数 n。

8.8 分析：第二峰/第一峰相对高度 vs 穿越比例

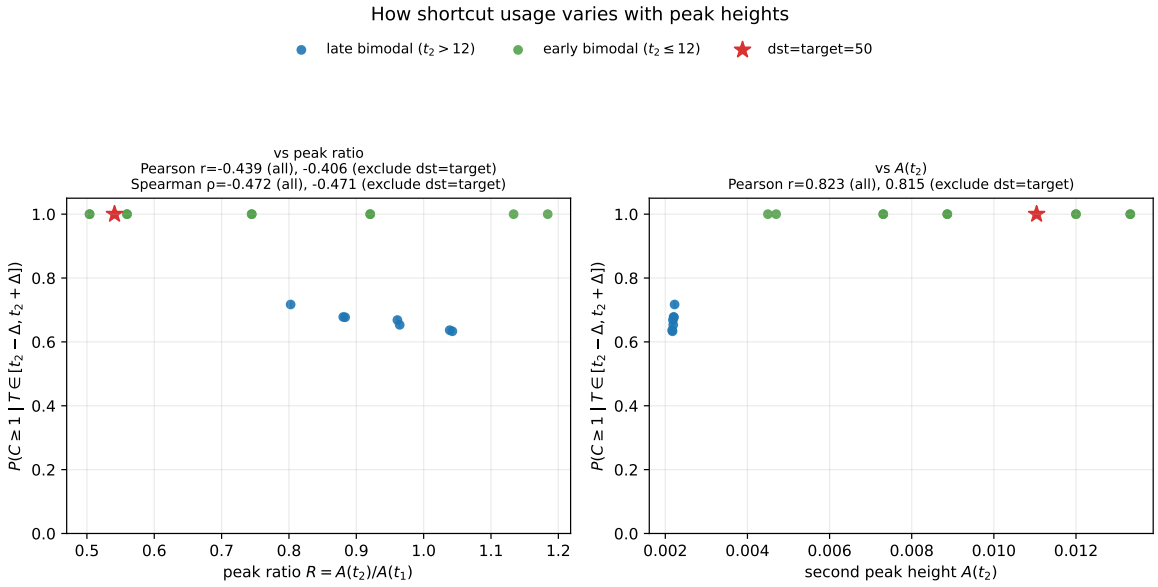


图 18: 左：穿越概率随峰高比 R 的变化；右：随第二峰绝对高度 $A(t_2)$ 的变化。误差条为 Wilson 95% 置信区间；颜色区分 early/late（以 $t_2 \leq 2K$ 为 early）；红色星号为 dst = target 的特殊情形。

8.8.1 相关性（脚本自动统计）

- Pearson $r(R,\ P(C \geq 1))$：-0.439（全体），-0.406（去掉 dst = target）。
- Spearman $\rho(R,\ P(C \geq 1))$：-0.472（全体），-0.471（去掉 dst = target）。
- Pearson $r(A(t_2),\ P(C \geq 1))$：0.823（全体），0.815（去掉 dst = target）。
- （等价）Pearson $r(A(t_2),\ P(C = 0))$：-0.823（全体），-0.815（去掉 dst = target）。

- （late-only：$t_2 > 12$）Pearson $r(A(t_2),\ P(C \geq 1))$：0.938；Pearson $r(R,\ P(C \geq 1))$：-0.973。

8.8.2 结论要点（Case B，src $= 1$）

- **两类机制：**当 src $= n_0$ 时，双峰里通常出现 “early-t_2” 与 “late-t_2” 两类：前者第二峰在很早的步数出现（如 $t_2 \leq 8$），后者第二峰出现在较晚的时间（如 $t_2 \approx 90$–110）。
- **early-t_2：**在这些案例中，条件在第二峰窗口内被吸收时几乎必经 shortcut，因而 $P(C \geq 1 \mid T \in W) \approx 1$（并且基本都是 $C = 1$）。
- **late-t_2：**在这些案例中，窗口内仍有可观比例 “0 crossing”（大约 0.28–0.37）。
- **随第二峰高度与峰高比：**总体上 $A(t_2)$ 越小，$P(C \geq 1 \mid T \in W)$ 越小（等价地 $P(C = 0 \mid T \in W)$ 越大）；因此 “第二峰越低 $\Rightarrow$ 通过 shortcut 的比例越高” **不成立**，数据呈现的是相反趋势。对 late-second-peak 子集而言，$A(t_2)$ 的变化幅度本身也很小，更推荐用峰高比 R 来组织穿越比例（排除 dst = target）。
- **特殊点** dst = target：shortcut 直接指向吸收点，会导致窗口很早且 $P(C \geq 1)$ 接近 1，需要与 late-second-peak 机制区分开讨论。

8.9 汇总表

dst	t_1	t_2	Δ	R	$A(t_1)$	$A(t_2)$	$P(C=0)$	$P(C \geq 1)$
36	34	108	3	1.043	0.0020860594	0.00217576	0.367	0.633
37	28	104	3	0.964	0.0022753112	0.0021934	0.347	0.653
38	24	98	3	0.883	0.0025027973	0.00220997	0.323	0.677
39	21	89	3	0.802	0.0027759601	0.00222632	0.283	0.717
43	4	8	1	1.184	0.0039697399	0.00469917	0.000	1.000
45	3	5	1	0.921	0.0079321716	0.00730663	0.000	1.000
46	3	5	1	0.745	0.011900107	0.00886558	0.000	1.000
47	2	4	1	0.504	0.023807937	0.0119992	0.000	1.000
48	2	4	1	0.560	0.023789286	0.013322	0.000	1.000
50	3	5	1	0.541	0.020408317	0.0110409	0.000	1.000
52	2	4	1	0.560	0.023789286	0.013322	0.000	1.000
53	2	4	1	0.504	0.023807937	0.0119992	0.000	1.000
54	3	5	1	0.745	0.011900107	0.00886558	0.000	1.000
55	3	5	1	0.921	0.0079321716	0.00730663	0.000	1.000
57	4	6	1	1.134	0.003966843	0.0044984	0.000	1.000
62	24	97	3	0.881	0.0025011691	0.00220303	0.322	0.678
63	28	103	3	0.961	0.0022743913	0.00218569	0.332	0.668
64	34	108	3	1.039	0.0020860924	0.00216745	0.363	0.637

如何复现：

- `cdreports/ring_valley_dst`
- flux 扫描（确定性，`sc-src=6`）：`python3code/bimodality_flux_scan.py--sc-src6--aw-check`
- flux 扫描（确定性，`sc-src=1`）：`python3code/bimodality_flux_scan.py--sc-src1--aw-check`
- dst 扫描 + MC（`sc-src=6`）：`python3code/dst_shortcut_usage_mc.py--sc-src6--mc-all-bimodal`
- dst 扫描 + MC（`sc-src=1`）：`python3code/dst_shortcut_usage_mc.py--sc-src1--mc-all-bimodal`
- 编译：`latexmk-xelatex-auxdir=build-emulate-aux-dirring_valley_dst_cn.tex`

（MC 默认 `--seed 0`，也可手动指定）。