

# 双目标 lazy ring：无 shortcut / 有 shortcut 的多峰首达机制与数值结果

## 参数定义（读图对照）

所有索引均按  $N$  取模。正向定义为节点编号递增方向（示意图中为顺时针）。

- $N$ : 环上节点数。
- $n_0$ : 起点。
- $(m_1, m_2)$ : 两个吸收目标。
- $K$ : 每步可走的邻居数 ( $K = 2$  为  $\pm 1$ ,  $K = 4$  为  $\pm 1, \pm 2$ )。
- $q$ : 移动概率; 停留概率为  $1 - q$ 。
- $g$ : 全局漂移 (偏置) 参数;  $g > 0$  偏向正向。
- $\beta$ : shortcut 强度 (selfloop 规则); shortcut 概率  $p = \beta(1 - q)$ 。
- $\text{src}, \text{dst}$ : shortcut 起点/终点。
- $\rho_k$ : 在目标  $m_k$  的吸收概率 (本文取  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ )。

## 结论与关键图示

我们构建了双目标的 lazy ring 体系, 并在无 shortcut 与有 shortcut (selfloop 规则) 两条主线上给出可复现的双峰/三峰例子。结论要点如下:

1. **无 shortcut 但有漂移时**, 双目标首达分布可稳定出现双峰: 逆漂移短路径给出快峰, 顺漂移绕行给出慢峰 (图 2-3)。
2. **有 shortcut 时**, 双目标首达分布呈现典型的“快/慢通道”叠加; 快峰由 shortcut 通道主导, 慢峰由非 shortcut 通道主导, 并在  $(N, \beta)$  平面上形成双峰窗口 (图 4-5, 图 8)。
3. **三峰示例**可由强漂移 +  $K = 4$  的 jump-over 机制触发, 出现按“圈数”分层的多峰列 (图 6)。

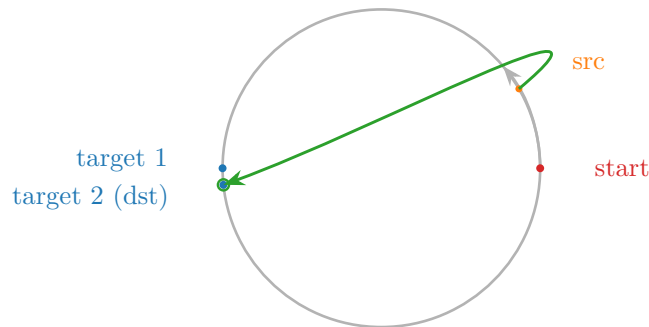


图 1: 双目标 lazy ring + 单向 shortcut 的几何示意 (报告中的 shortcut 案例参数)。

明确配置（所有下标按  $N$  取模）。起点固定为  $n_0 = 0$ 。代表性案例的两目标与 shortcut 配置如下：

- **Case A（无 shortcut,  $K = 2$ ）** :  $N = 20$ , 目标  $(m_1, m_2) = (18, 10)$ ,  $q = 2/3$ ,  $g = 0.6$ ,  $\beta = 0$ 。
- **Case B（无 shortcut,  $K = 4$ ）** :  $N = 30$ , 目标  $(m_1, m_2) = (27, 15)$ ,  $q = 2/3$ ,  $g = 0.6$ ,  $\beta = 0$ 。
- **Case C/D（有 shortcut,  $K = 2/4$ ）** :  $N = 60$ , 目标  $(m_1, m_2) = (30, 31)$ ,  $\text{src} = 5$ ,  $\text{dst} = 31$ ,  $q = 2/3$ ,  $g = 0$ ,  $\beta = 0.02$ 。
- **Case E（三峰, 无 shortcut,  $K = 4$ ）** :  $N = 30$ , 目标  $(m_1, m_2) = (29, 20)$ ,  $q = 0.9$ ,  $g = 0.8$ ,  $\beta = 0$ 。

同样配置已汇总在表 1。

### 代表性 case: 几何 + FPT

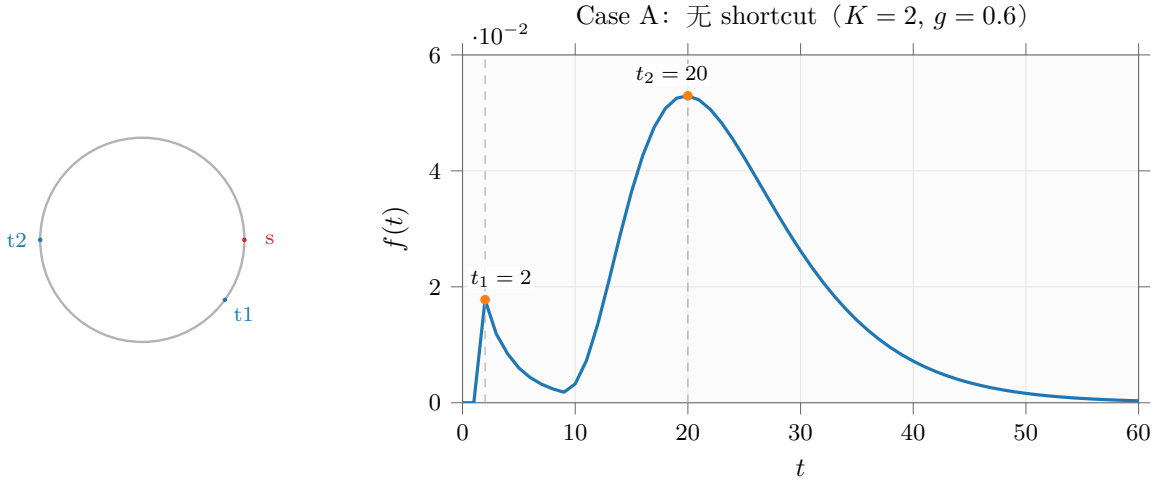


图 2: Case A: 几何与双峰 FPT（圆点为峰值，虚线为  $t_1, t_2$ ）。

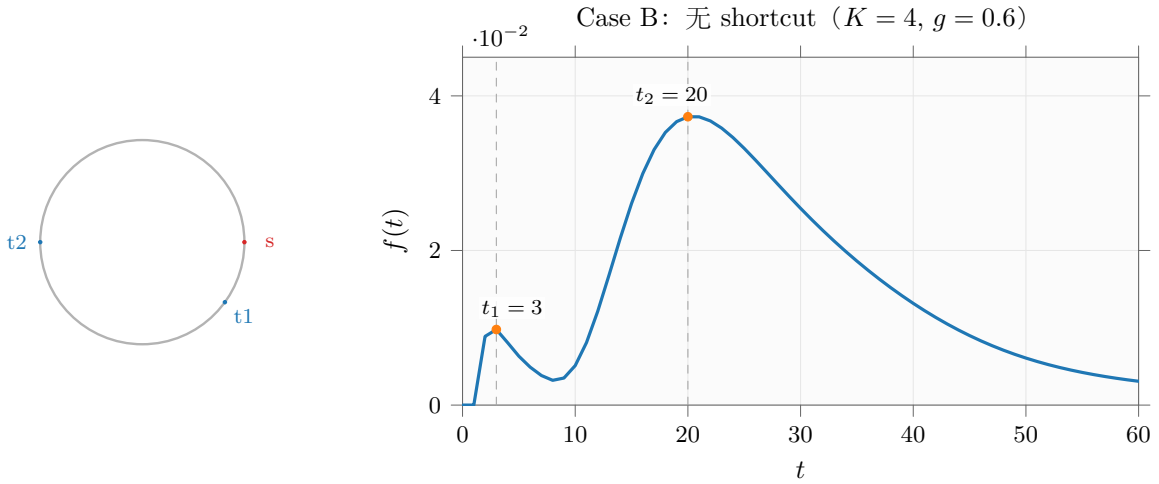


图 3: Case B: 几何与双峰 FPT（圆点为峰值，虚线为  $t_1, t_2$ ）。

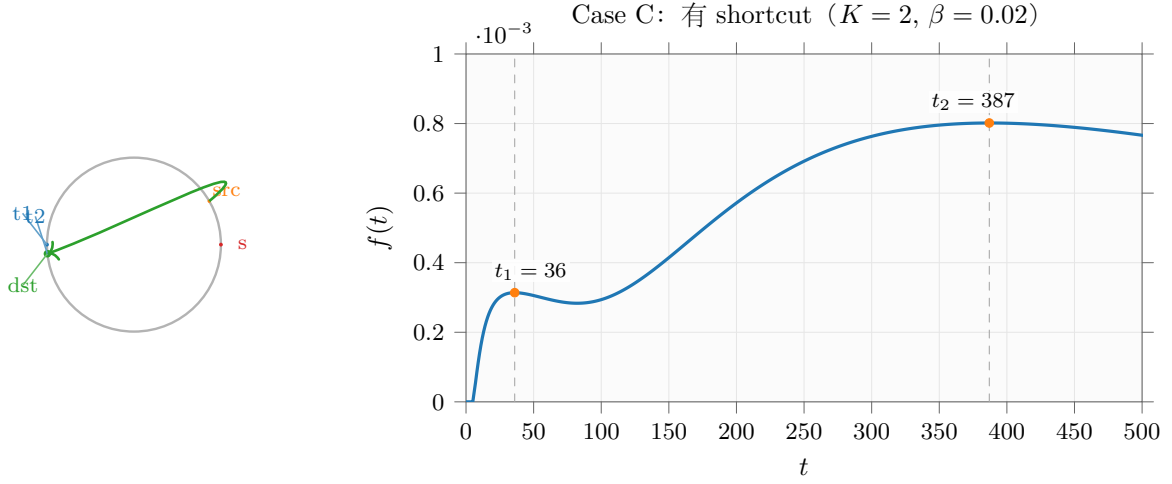


图 4: Case C: 几何与双峰 FPT (圆点为峰值, 虚线为  $t_1, t_2$ )。

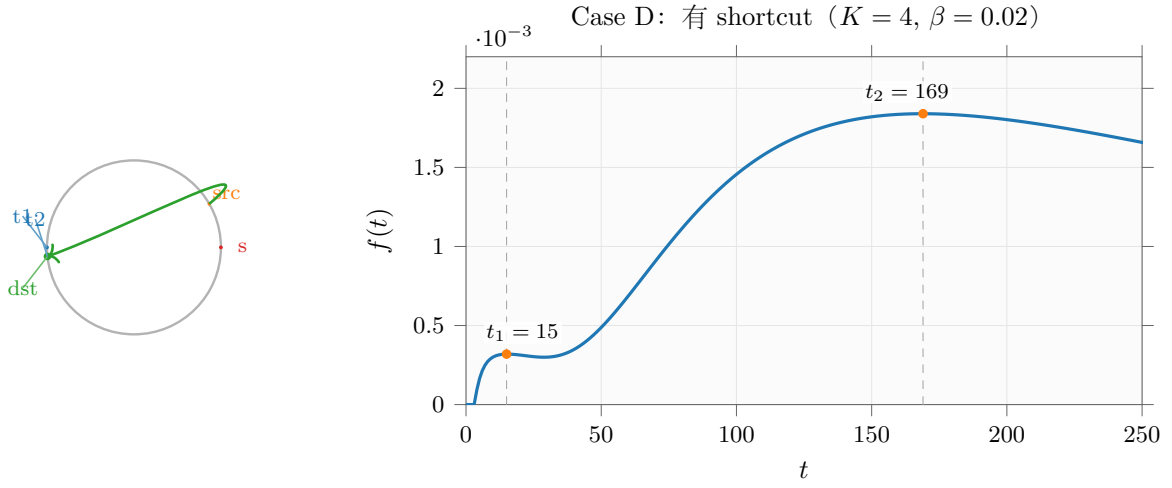


图 5: Case D: 几何与双峰 FPT (圆点为峰值, 虚线为  $t_1, t_2$ )。

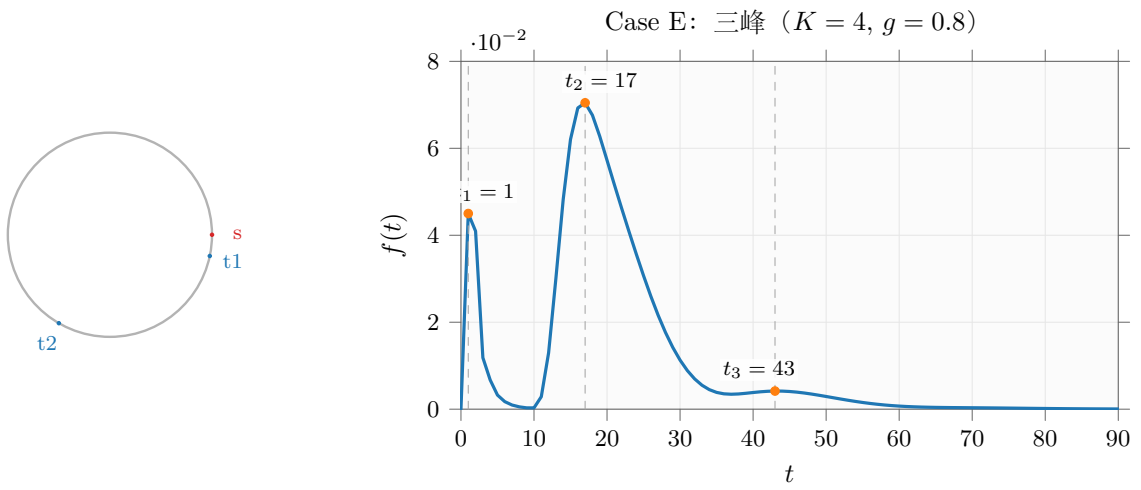


图 6: Case E: 几何与三峰 FPT (圆点为峰值, 虚线为峰位置)。

## 模型与数学机理（双目标吸收）

**Lazy ring 与漂移。** 环上有  $N$  个节点  $(0, 1, \dots, N-1)$ 。每步以概率  $1-q$  停留，以概率  $q$  在环上移动。对  $K=2$ （位移  $\pm 1$ ）与  $K=4$ （位移  $\pm 1, \pm 2$ ），引入漂移参数  $g \in [-1, 1]$ ：

$$P(+) = \frac{q(1+g)}{2}, \quad P(-) = \frac{q(1-g)}{2}, \quad (1)$$

并在同向步长之间均分概率（例如  $K=4$  时  $+1, +2$  各取  $P(+)/2$ ）。

**Shortcut (selfloop 规则)。** 仅在源点  $\text{src}$  处，把自环概率的一部分挪到  $\text{src} \rightarrow \text{dst}$ ：

$$p = \beta(1-q), \quad P(\text{src} \rightarrow \text{src}) = 1-q-p, \quad P(\text{src} \rightarrow \text{dst}) = p. \quad (2)$$

其余节点与无 shortcut 情形一致。

**两目标吸收的精确递推。** 设目标为  $m_1, m_2$ ，到达任一目标即吸收。令  $\mathbf{p}_t$  为“吸收后”的分布，则

$$\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}_t \mathbf{W}, \quad f_i(t+1) = [\mathbf{p}_{t+1}]_{m_i}, \quad \mathbf{p}_{t+1}(m_i) = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3)$$

因此总首达分布为  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ ，生存函数  $S(t) = \sum_i p_t(i)$  满足  $S(t+1) = S(t) - f(t+1)$ 。

**吸收马尔可夫链视角。** 将转移矩阵写成

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{Q}$  是“非吸收态”子链， $\mathbf{R}$  给出一步进入两个吸收点的概率。令  $\mathbf{r}_i$  是  $\mathbf{R}$  中对应目标  $m_i$  的列，初始分布为  $\mathbf{p}_0$ ，则

$$f_i(t+1) = \mathbf{r}_i^\top \mathbf{Q}^t \mathbf{p}_0, \quad f(t+1) = \mathbf{r}^\top \mathbf{Q}^t \mathbf{p}_0, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ 。生成函数形式为

$$\tilde{f}_i(z) = z \mathbf{r}_i^\top (I - z\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{p}_0. \quad (6)$$

等价地，生存函数为

$$S(t) = \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^t \mathbf{p}_0, \quad f(t+1) = S(t) - S(t+1), \quad (7)$$

因此两目标首达完全由  $\mathbf{Q}$  与两列  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  决定。若  $\mathbf{Q}$  可对角化， $\mathbf{Q} = \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1}$ ，则

$$f(t+1) = \sum_k c_k \lambda_k^t, \quad (8)$$

多个时间尺度（不同  $|\lambda_k|$ ）的模态权重可比时就会出现多峰。这给出了“两目标吸收的完整数学机制”：时间域上是  $\mathbf{Q}$  的幂次叠加，频域上是  $(I - z\mathbf{Q})^{-1}$  的谱结构。

与 Giuggioli 多目标公式的对应。对任意图上的随机游走，单目标首达生成函数满足

$$\tilde{F}_{i \rightarrow j}(z) = \frac{\tilde{P}_i(j; z)}{\tilde{P}_j(j; z)}. \quad (9)$$

两目标 splitting 首达可写为  $2 \times 2$  行列式比值 [1]：若  $G_k = \tilde{F}_{n_0 \rightarrow m_k}(z)$ ， $F_{jk}$  由目标间首达与回返项组成，则

$$\tilde{F}_{n_0 \rightarrow (m_1 | m_2)}(z) = \frac{G_1 F_{22} - F_{12} G_2}{F_{11} F_{22} - F_{12} F_{21}}, \quad (10)$$

另一目标对称可得，总首达为两者相加。对部分吸收  $\rho_k$ ，对角元为

$$F_{kk} = 1 + \frac{1 - \rho_k}{\rho_k} [1 - R_{m_k}(z)], \quad (11)$$

其中  $R_{m_k}(z)$  表示在未被另一目标吸收的条件下回到  $m_k$  的生成函数。在本报告的  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  情形下， $F_{11} = F_{22} = 1$ ，公式进一步简化。

**多峰机理（直观图像）。** 多峰来自多条路径族/多时间尺度的叠加：漂移会分裂为“逆漂移快峰”与“顺漂移慢峰”；shortcut 会分裂为“用 shortcut 的快通道”与“未用 shortcut 的慢通道”；两目标进一步对概率质量做 splitting，从而放大峰的可见性。

## 无 shortcut：漂移驱动的双峰

Case A/B（图 2-3）给出无 shortcut 情形的双峰示例，图 7 显示两目标分裂后的贡献。

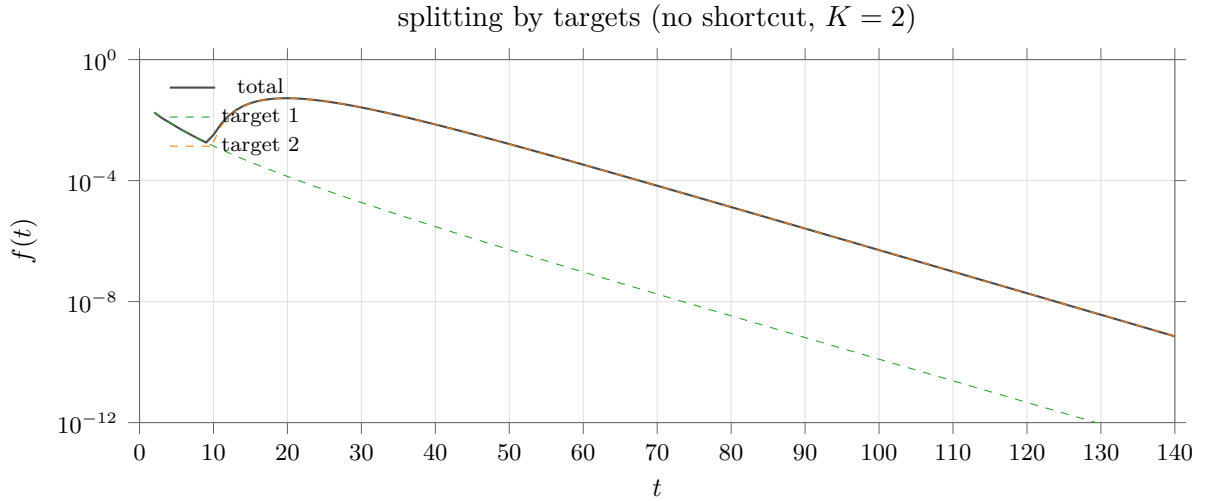


图 7: 两目标 splitting: 总 FPT= 目标 1 分量 + 目标 2 分量。

## 有 shortcut：快/慢通道叠加

Case C/D（图 4-5）展示 selfloop 规则下的双峰例子（ $K = 2$  与  $K = 4$ ）。图 8 给出  $(N, \beta)$  的双峰相图（0=无双峰，1=paper 双峰，2=macro 双峰）。

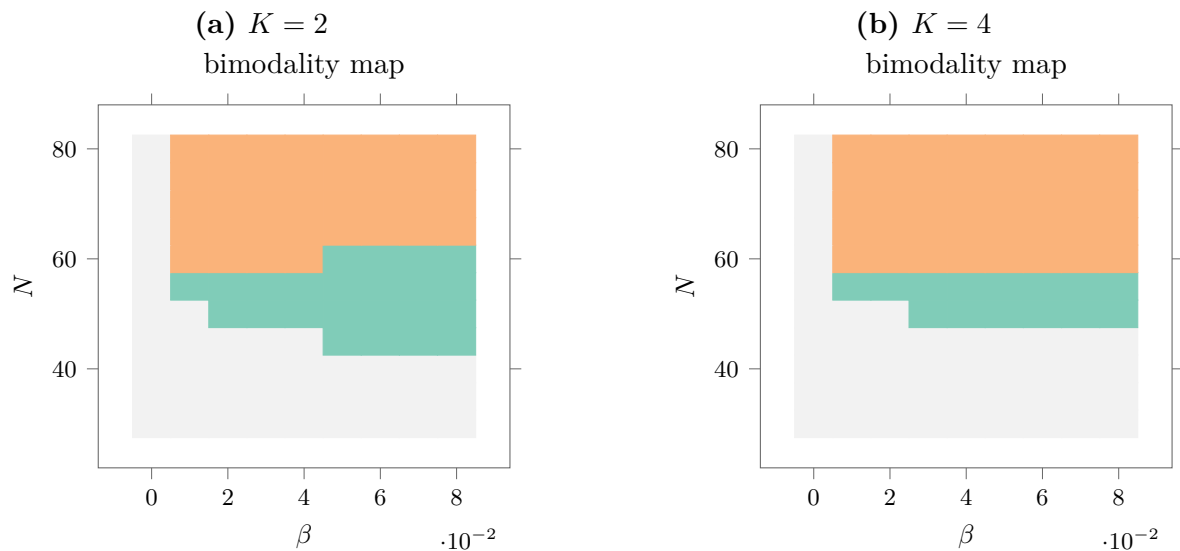


图 8: 双峰相图 (0=无双峰, 1=paper, 2=macro)。几何:  $\text{src} = 5$ ,  $\text{dst} = m_2$ ,  $m_1 = \lfloor N/2 \rfloor$ ,  $m_2 = m_1 + 1$ 。

### 三峰示例

Case E (图 6) 展示了三峰例子: 强漂移 +  $K = 4$  带来的 jump-over 使得“按圈数”的首达族群出现多峰列。

### 模型配置与复现

表 1 与表 2 汇总了报告中的代表性案例与峰信息。复现命令:

```
python3 scripts/reportctl.py run --report ring_two_target -- python3 code/two_target_report
python3 scripts/reportctl.py build --report ring_two_target --lang cn
```

表 1: 代表性案例配置 (详见 `research/reports/ring_two_target/artifacts/data/model_configs.csv`)。

| Case        | $N$ | $K$ | $q$   | $g$  | $\beta$ | targets |
|-------------|-----|-----|-------|------|---------|---------|
| A_no_sc_K2  | 20  | 2   | 0.667 | 0.60 | 0.000   | (18,10) |
| B_no_sc_K4  | 30  | 4   | 0.667 | 0.60 | 0.000   | (27,15) |
| C_sc_K2     | 60  | 2   | 0.667 | 0.00 | 0.020   | (30,31) |
| D_sc_K4     | 60  | 4   | 0.667 | 0.00 | 0.020   | (30,31) |
| E_triple_K4 | 30  | 4   | 0.900 | 0.80 | 0.000   | (29,20) |

### 参考文献

- [1] L. Giuggioli et al., *Multi-target search in bounded and heterogeneous environments: a lattice random walk perspective*, arXiv:2311.00464v2.
- [2] A. Sarvaharman and L. Giuggioli, *Phys. Rev. E* 102, 062124 (2020).

表 2: 峰位置与判据 ( $t_1$  为最早峰,  $t_2$  为最晚峰)。

| Case        | $t_1$ | $h_1$    | $t_2$ | $h_2$    | $h_2/h_1$ | paper | macro |
|-------------|-------|----------|-------|----------|-----------|-------|-------|
| A_no_sc_K2  | 2     | 1.78e-02 | 20    | 5.30e-02 | 2.98      | True  | True  |
| B_no_sc_K4  | 3     | 9.78e-03 | 20    | 3.73e-02 | 3.81      | True  | False |
| C_sc_K2     | 36    | 3.14e-04 | 387   | 8.02e-04 | 2.55      | True  | True  |
| D_sc_K4     | 15    | 3.19e-04 | 169   | 1.84e-03 | 5.76      | True  | True  |
| E_triple_K4 | 1     | 4.50e-02 | 43    | 4.17e-03 | 0.09      | True  | True  |