

Lazy 环 + 单向 shortcut: $K = 2$ 与 $K = 4$ 的双峰差异与 jump-over 机制 (精确首达分布 + 轨迹互斥分解)

1 问题与目标 (重述)

我们在 $K = 2$ (只能走 ± 1) 的 lazy 环 + 单向 shortcut (selfloop 规则) 里已观察到: 当 shortcut 强度参数 β 变大时, 首达 (首吸收) 时间分布 $f(t)$ 的慢峰会被压低, 双峰仅在较小 β 下可能出现。现在将起点固定为 n_0 , 吸收点取离 n_0 最远 (近似 antipodal) 的位置, 并将邻域扩展到 $K = 4$ (允许 $\pm 1, \pm 2$)。由于 $K = 4$ 允许一步跨过吸收点 (jump-over 但不落在吸收点), 本报告的目标是:

- **层 A:** 用精确 (高精度) 方法扫描参数, 判定哪些 (N, β, K) **真的** 满足统一的双峰判据;
- **层 B:** 在双峰案例上做轨迹级别的**互斥分类**与条件统计, 给出可发表的机制解释: $K = 2$ 与 $K = 4$ 的差异来自哪里, jump-over 在其中扮演何种角色。

2 模型定义 (固定口径)

- Ring: N 个点, 节点标号按论文惯例为 $1, \dots, N$ 。
- $K = 2k$ 个环邻居: 以概率 q 进行环上移动, 并在 $\{\pm 1, \dots, \pm k\}$ 中等概率选一个位移; 即每条环边概率为 q/K 。
- Lazy: 以概率 $1 - q$ self-loop (原地不动)。
- 单向 shortcut: 在源点 src 增加一条有向边 $\text{src} \rightarrow \text{dst}$ 。
- **selfloop 规则 (本文主模型):** 从 src 的 self-loop 中挪出概率

$$p = \beta(1 - q),$$

并把它加到 $\text{src} \rightarrow \text{dst}$; 环上移动概率 q 与每条环边概率 q/K **保持不变**。

- 吸收: 到达 target 后以概率 ρ 吸收 (本文取 $\rho = 1$)。

一步转移概率 (显式写法) 以下默认所有加减均按模 N 运算并回到 $1, \dots, N$ 。令 $k = K/2$ 。对任意非源点 $i \neq \text{src}$,

$$P(i \rightarrow i) = 1 - q, \quad P(i \rightarrow i \pm r) = \frac{q}{K}, \quad r = 1, \dots, k.$$

在源点 $i = \text{src}$ (selfloop 规则), 仅改变 self-loop 与 shortcut 两项:

$$P(\text{src} \rightarrow \text{src}) = 1 - q - p, \quad P(\text{src} \rightarrow \text{dst}) = p, \quad P(\text{src} \rightarrow \text{src} \pm r) = \frac{q}{K}.$$

为保证概率非负，需要 $0 \leq p \leq 1 - q$ ，等价于 $0 \leq \beta \leq 1$ （在固定 q 下）。

首吸收时间的定义 记 X_t 为第 t 步结束后的所在节点（离散时间）。定义首吸收时间 T 为第一次到达 target 且发生吸收的步数：若在某一步结束时 $X_t = \text{target}$ ，则以概率 ρ 终止（吸收），否则以概率 $1 - \rho$ 继续行走。在本文的主设定 $\rho = 1$ 下， T 就是严格的首达时间（first passage）。

几何设置（与既有报告一致的“paper-like”风格，但吸收点相对 n_0 取近似 antipodal）：

$$n_0 = 1, \quad \text{target} = n_0 + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad \text{src} = n_0 + 5, \quad \text{dst} = \text{target} + 1$$

其中加法均在环上取模（并回到 $1..N$ ）。注意这里取 $\text{dst} = \text{target} + 1$ 的目的，是避免 shortcut 直接指向吸收点（ $\text{dst} = \text{target}$ 会引入“一旦用 shortcut 几乎立刻吸收”的另一种机制，在 valley_dst_report 中也被单独标注讨论）。

2.1 模型口径对照（与本仓库其他报告的关系）

本仓库里还存在另一类常用构造（见 valley_report / valley_dst_report）：在 src 处新增出边并对源点出边重归一（每条出边 $1/\deg(\text{src})$ ），且通常为非 lazy（无 self-loop）。该构造与本文主模型（lazy + selfloop 规则 $p = \beta(1 - q)$ 、并保持环上移动概率 q 不变）在概率口径上不同。因此：

- 本报告所有扫描与统计结论默认都指向 **lazy + selfloop** 这一口径；
- 对于“第一峰更偏向 shortcut 路径族、第二峰更偏向 nonshortcut 路径族”这类**混合路径族解释**，我们预期其为跨构造的鲁棒现象，但具体双峰出现/消失的阈值（例如随 β 的临界点）会依赖概率分配口径。

3 双峰判据（必须统一）

沿用既有报告的 paper 风格判据：

- **严格局部峰**：若 $f(t) > f(t - 1)$ 且 $f(t) > f(t + 1)$ 且 $f(t) \geq h_{\min}$ ，则 t 为峰（边界取 $f(0) = f(T + 1) = 0$ ）。
- **双峰（paper）**：存在至少两个峰，并要求第二高峰高度 $\geq 1\%$ 的最高峰高度。
- **宏观双峰（可选）**：在 paper 双峰基础上，再要求两最高峰满足 $t_2/t_1 \geq 10$ 。

本文默认 $h_{\min} = 10^{-7}$ ，第二峰相对高度阈值 1%，宏观比例阈值 10。

4 两类路径事件与互斥分类（机制变量）

4.1 Shortcut 使用次数 C

令 C 为轨迹中穿越有向边 $\text{src} \rightarrow \text{dst}$ 的次数。常用粗分类为 $C = 0$ vs $C \geq 1$ （也可细分 $0/1/\geq 2$ ）。

4.2 Jump-over 次数 J ($K = 4$ 的新增核心)

在 $K = 4$ (允许 ± 2) 时, 环上一步可能跨过 target 但不落在 target。定义 J 为仅对环上移动步计数的 jump-over 次数: 若某一步从 x 走到 $x \pm r$ ($r \geq 2$) 且

$$\text{target} \in \{x \pm 1, x \pm 2, \dots, x \pm (r-1)\},$$

则记为一次 jump-over。对 $K = 2$ 情形, 恒有 $J \equiv 0$ 。

等价判据 (用有向环距离表述) 对一次环上 $+r$ 跳 (顺时针), 令 $d_+(x, \text{target}) = (\text{target} - x) \bmod N$, 则当 $1 \leq d_+(x, \text{target}) \leq r-1$ 时发生 jump-over; 对一次 $-r$ 跳 (逆时针), 令 $d_-(x, \text{target}) = (x - \text{target}) \bmod N$, 当 $1 \leq d_-(x, \text{target}) \leq r-1$ 时发生 jump-over。特别地, 对 $K = 4$ (仅有 $r = 2$ 会产生 jump-over), jump-over 只可能在 $x = \text{target} \pm 1$ 且走 ∓ 2 的那一步发生 (例如从 $\text{target} - 1$ 走到 $\text{target} + 1$)。

4.3 第一层互斥分类 (4 类)

用布尔量 ($C \geq 1$) 与 ($J \geq 1$) 组合成 4 个互斥且完备的类别:

$$\text{A: } (C = 0, J = 0), \quad \text{B: } (C \geq 1, J = 0), \quad \text{C: } (C = 0, J \geq 1), \quad \text{D: } (C \geq 1, J \geq 1).$$

该分类与既有 “shortcut vs nonshortcut” 完全兼容 (把 A/C 合并为 nonshortcut, 把 B/D 合并为 shortcut), 同时把 jump-over 纳入解释变量。

5 峰/谷/峰三段窗口与条件统计

对每条精确 $f(t)$, 在 paper 判据下取时间序上前两处主峰:

$$t_1 < t_2, \quad t_v = \arg \min_{t_1 < t < t_2} f(t).$$

定义窗口宽度

$$\Delta = \max(1, \lfloor 0.05(t_2 - t_1) \rfloor),$$

并将每条轨迹按其吸收时间 T 互斥地归类到最接近的中心 ($t_1/t_v/t_2$) 且满足 $|T - \text{center}| \leq \Delta$, 否则为 other。在每个窗口内统计:

- 窗口质量 (样本比例) $\mathbb{P}(T \in W)$;
- $\mathbb{P}(C \geq 1 | T \in W)$ 、 $\mathbb{P}(J \geq 1 | T \in W)$ (并给出 Wilson 95% 置信区间);
- 4 类 (A/B/C/D) 的比例。

6 精确 $f(t)$ 计算: AW 反演与时间域迭代

6.1 AW 反演 (主模型)

为对齐本仓库既有报告中 “解析精确曲线” 的口径 (例如 valley_dst_report), 本文在主模型 (允许 jump-over、jumpover_absorbs = 0) 下绘图所用的精确 $f(t)$ 采用 Abate-Whitt (AW) 反演从生成函数得到。思路是: 先在复平面上计算首吸收分布的生成函数, 再用离散 Cauchy 反演 (FFT 实现) 恢复系数。

无 defect 的 lazy 环: 谱表示 先考虑不含 shortcut 的 lazy K -邻居环 ($K = 2k$)。其一步转移矩阵具有平移对称性, 模态 $\ell = 0, \dots, N-1$ 的特征值为

$$\lambda_\ell = (1 - q) + \frac{2q}{K} \sum_{r=1}^k \cos\left(\frac{2\pi r \ell}{N}\right).$$

由此可写出“无缺陷”resolvent (生成函数 Green 函数)

$$Q(d, z) = \sum_{t \geq 0} \Pr(X_t = X_0 + d) z^t = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{\cos(2\pi \ell d / N)}{1 - z \lambda_\ell}, \quad |z| < 1,$$

其中 d 为环距离 (模 N 的位移)。

单向 shortcut (selfloop 规则): 秩一缺陷 + Sherman–Morrison selfloop 规则仅改变源点 src 的出概率, 因此相对无缺陷环, 转移矩阵是一个“单列”的秩一修正 (本质上是 rank-one defect)。因此可以用 Sherman–Morrison 公式把含 defect 的 resolvent $S_{i,j}(z) = \sum_{t \geq 0} \Pr(X_t = i \mid X_0 = j) z^t$ 表示成若干个 $Q(\cdot, z)$ 的组合 (实现中按需计算若干距离的 Q , 并在每个 z 上做一次秩一更新)。

点吸收 (ρ) 的生成函数 在“到达 target 后以概率 ρ 吸收”的约定下, 首吸收分布 $f(t) = \Pr(T = t)$ 的生成函数为

$$\tilde{f}(z) = \sum_{t \geq 1} f(t) z^t = \frac{\rho S_{\text{target}, n_0}(z)}{(1 - \rho) + \rho S_{\text{target}, \text{target}}(z)}.$$

本文主设定 $\rho = 1$ 时, $\tilde{f}(z) = S_{\text{target}, n_0}(z) / S_{\text{target}, \text{target}}(z)$ 。

AW 反演 (FFT) 给定 $\tilde{f}(z)$, 在圆周 $z_m = r e^{2\pi i m / L}$ 上采样并做 FFT, 可近似恢复 $f(t)$:

$$f(t) \approx r^{-t} \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{f}(z_m) e^{-2\pi i m t / L}, \quad t = 1, \dots, T_{\max}.$$

本文默认取 $r = 10^{-4/T_{\max}}$ 、 L 为略大于 $T_{\max}$ 的 2 的幂 (与仓库内其他 AW 脚本一致), 并在代表点上取 $T_{\max} = 4000$ 以覆盖两处主峰与谷底的时间尺度。

6.2 时间域 master-equation 迭代 (扫描与非局部对照)

层 A 的大规模扫描需要把尾部质量压到很低 (例如 $\text{survival} \lesssim 10^{-14}$), 因此我们用时间域 master-equation 迭代 (吸收通量法) 得到数值精确的 $f(t)$ 并用于双峰判据。同理, “jump-over $\rightarrow$ 吸收”的反事实对照中, 吸收事件由“落点”扩展为“跨过” (非局部事件), 无法直接套用上面的点吸收 AW 公式, 因此该对照也使用时间域迭代。

7 层 A: 参数扫描 (哪里真的双峰)

7.1 N 扫描 (固定 $\beta = 0.02$)

固定 $q = 2/3$ 、 $\beta = 0.02$ ($p = \beta(1 - q)$)、上述几何, 并对偶数 $N = 10..200$ 扫描:

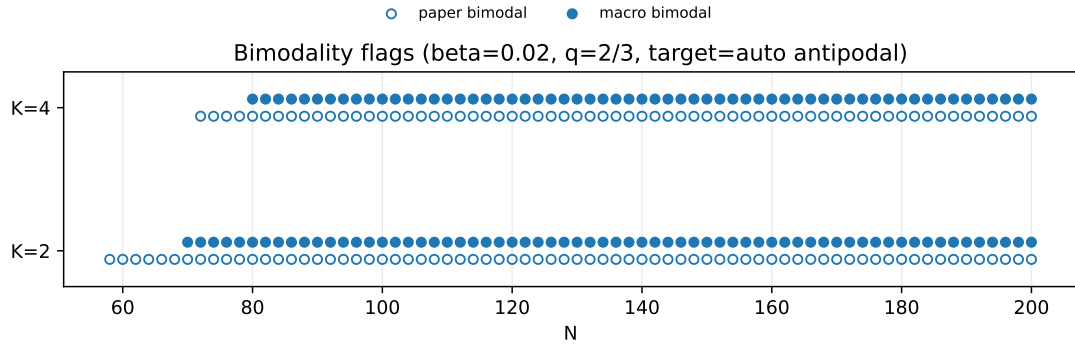


图 1: $\beta = 0.02$ 下 $K = 2$ 与 $K = 4$ 的 paper/macro 双峰标记 (空心 =paper, 实心 =macro)。

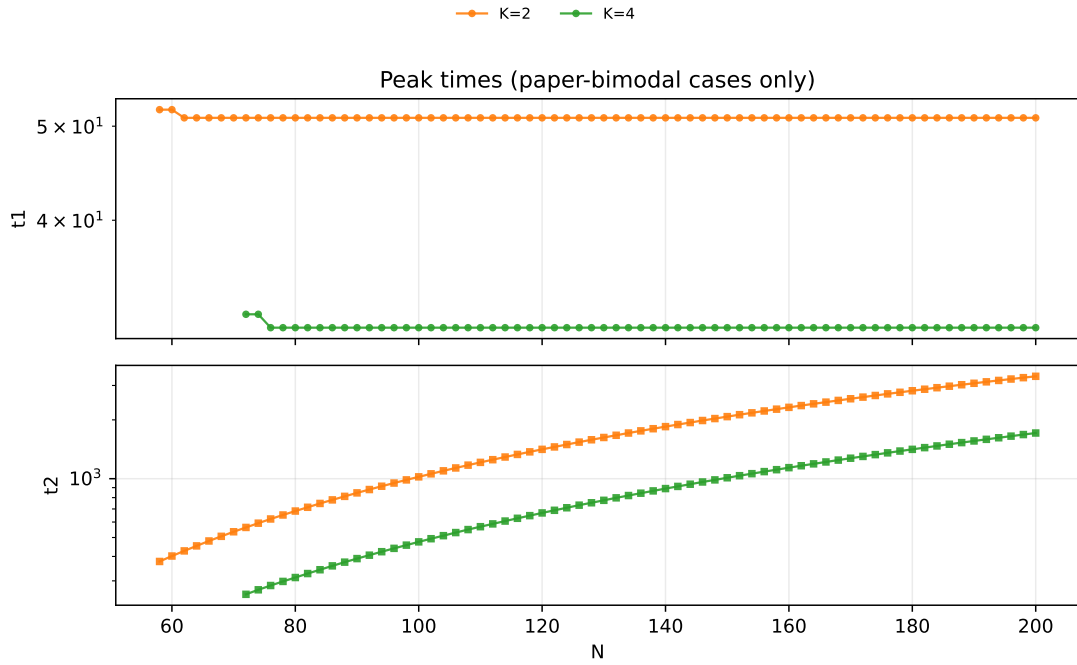


图 2: 仅对 paper-bimodal 案例, 记录首两峰时间 t_1, t_2 (对数坐标)。

7.2 β 扫描 (固定 $N = 100$)

固定 $N = 100$ 、 $q = 2/3$ ，扫描 β 并记录 paper/macro 与峰时间：

β	p	paper	macro	t_1	t_2
0	0	0	0	—	—
0.0005	0.000166667	1	1	54	1243
0.001	0.000333333	1	1	54	1236
0.002	0.000666667	1	1	54	1222
0.005	0.00166667	1	1	53	1183
0.01	0.00333333	1	1	53	1124
0.02	0.00666667	1	1	51	1022
0.03	0.01	1	1	50	935
0.05	0.0166667	1	1	48	780
0.07	0.0233333	0	0	—	—
0.1	0.0333333	0	0	—	—
0.15	0.05	0	0	—	—
0.2	0.0666667	0	0	—	—
0.3	0.1	0	0	—	—
0.5	0.166667	0	0	—	—
1	0.333333	0	0	—	—

表 1: $N=100$, $K = 2 (\pm 1)$, $q = 2/3$, target=auto ($\approx$ antipodal), selfloop 规则 $p = \beta(1 - q)$ 的 β 扫描 (paper/macro 判据 + 峰时间)。

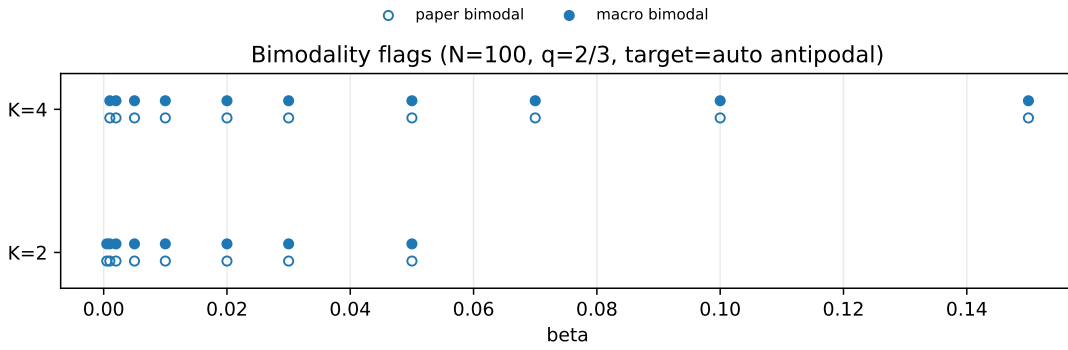


图 3: $N = 100$ 下 $K = 2$ 与 $K = 4$ 的 paper/macro 双峰标记随 β 的变化。

8 层 B: 机制解释 (轨迹互斥分解)

8.1 代表点: $N = 100, \beta = 0.02$ ($K = 2$ vs $K = 4$)

先给出精确 $f(t)$ (log 轴) 及峰/谷/峰窗口：

在同一窗口定义下，对 MC 轨迹做 4 类互斥分类 (A/B/C/D)：

β	p	paper	macro	t_1	t_2
0	0	0	0	–	–
0.0005	0.000166667	0	0	–	–
0.001	0.000333333	1	1	32	515
0.002	0.000666667	1	1	32	513
0.005	0.00166667	1	1	32	506
0.01	0.00333333	1	1	32	495
0.02	0.00666667	1	1	31	475
0.03	0.01	1	1	31	457
0.05	0.0166667	1	1	30	424
0.07	0.0233333	1	1	29	395
0.1	0.0333333	1	1	28	356
0.15	0.05	1	1	27	295
0.2	0.0666667	0	0	–	–
0.3	0.1	0	0	–	–
0.5	0.166667	0	0	–	–
1	0.333333	0	0	–	–

表 2: $N=100$, $K = 4 (\pm 1, \pm 2)$, $q = 2/3$, target=auto ($\approx$ antipodal), selfloop 规则 $p = \beta(1 - q)$ 的 β 扫描 (paper/macro 判据 + 峰时间)。

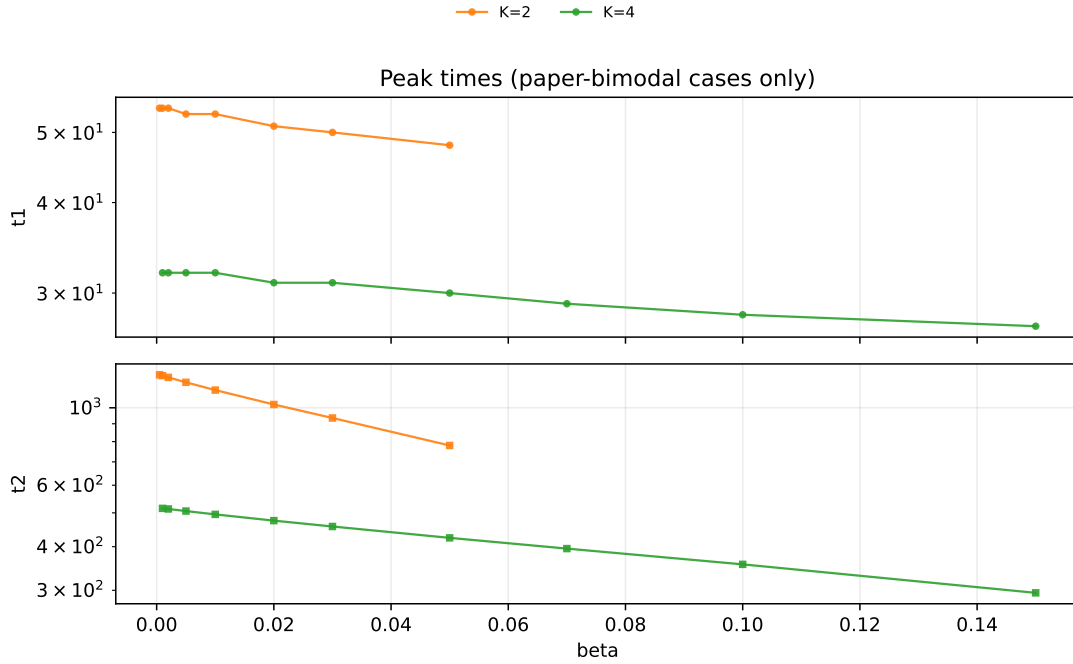


图 4: $N = 100$ 下 (仅 paper-bimodal), t_1, t_2 随 β 的变化 (对数坐标)。

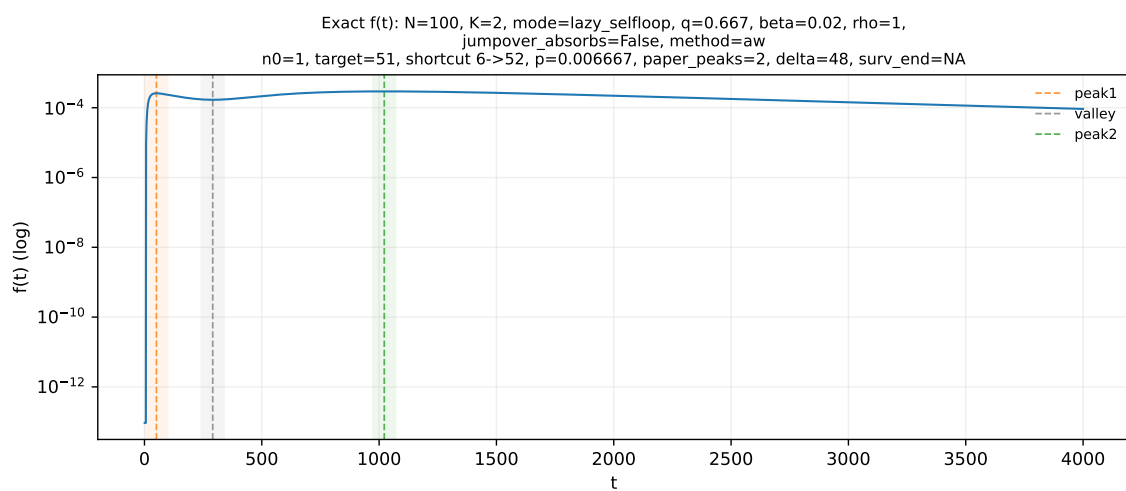


图 5: $K = 2$: AW 反演得到的精确 $f(t)$ 与窗口标注 ($q = 2/3, \beta = 0.02$)。

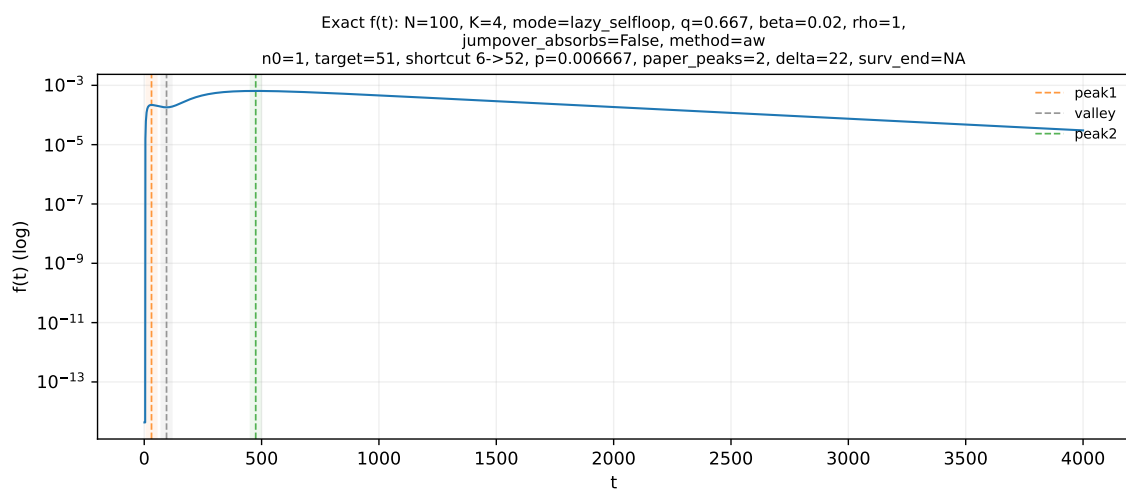


图 6: $K = 4$: AW 反演得到的精确 $f(t)$ 与窗口标注 ($q = 2/3, \beta = 0.02$)。

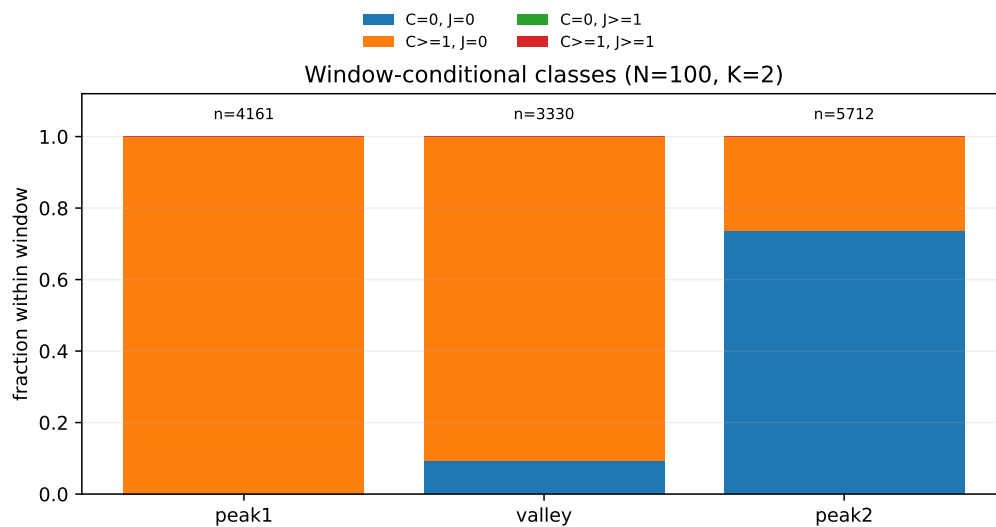


图 7: $K = 2$: peak1/valley/peak2 三段窗口内的 (C/J) 四类比例。此时 $J \equiv 0$, 退化为 shortcut vs nonshortcut。

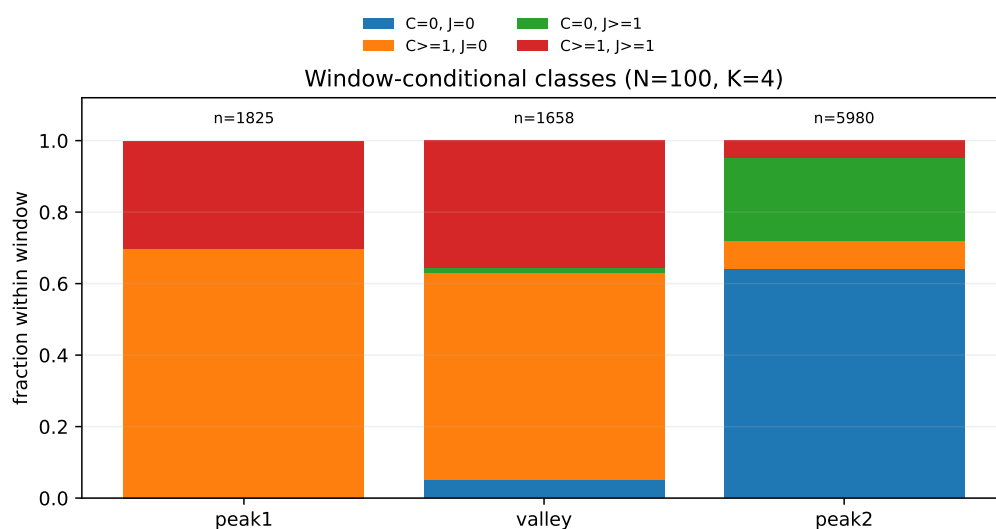


图 8: $K = 4$: peak1/valley/peak2 三段窗口内的 (C/J) 四类比例。

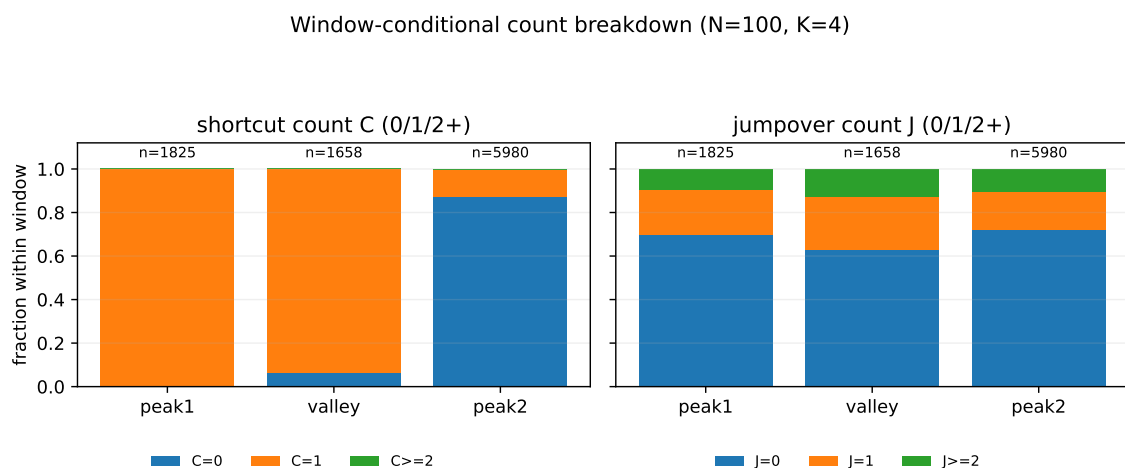


图 9: $K = 4$: 三段窗口内 C 与 J 的 0/1/ ≥ 2 计数分解 (用于检验“多次 overshoot”是否在慢峰附近累积)。

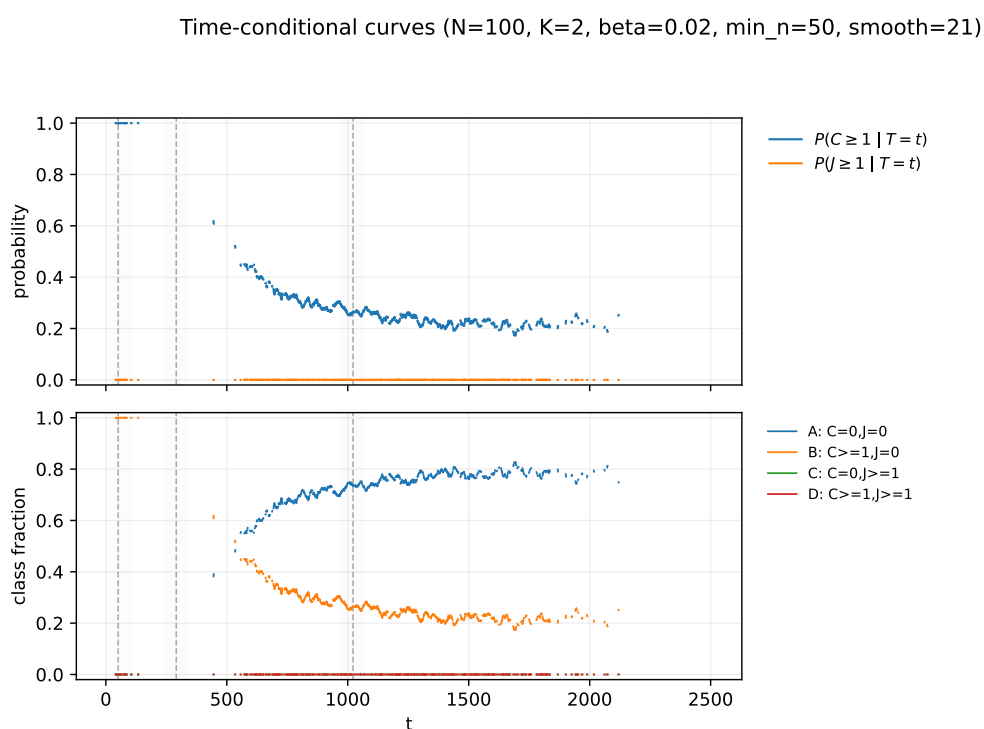


图 10: $K = 2$: 全时间条件曲线 (按吸收时间逐点条件化): $P(C \geq 1 | T = t)$ 以及四类 (A/B/C/D) 的时间权重随 t 的变化。

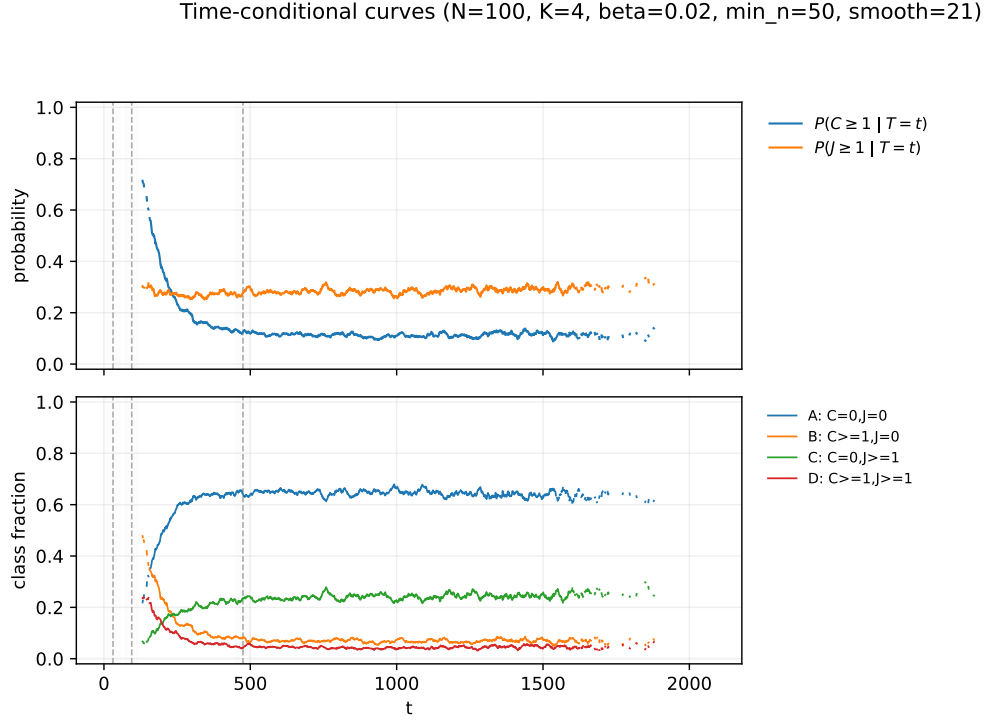


图 11: $K = 4$: 全时间条件曲线: 同时给出 $P(C \geq 1 | T = t)$ 、 $P(J \geq 1 | T = t)$ 以及四类 (A/B/C/D) 的时间权重。该图把“三窗切片”升级为“随时间连续变化”的机制证据链。

8.1.1 窗口统计的定量摘要 (更具体)

为把“读图要点”从定性描述落到可复核的数字上, 我们把代表点 $N = 100, \beta = 0.02$ 下三段窗口的条件统计整理成表格 (由脚本从 `*.summary.json` 自动生成):

window	t_c	n	$\Pr(T \in W)$	$\Pr(C \geq 1 W)$	$\Pr(J \geq 1 W)$	A	B	C	D
peak1	51	4161	0.021	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
valley	291	3330	0.017	0.908	0.000	0.092	0.908	0.000	0.000
peak2	1022	5712	0.029	0.263	0.000	0.737	0.263	0.000	0.000

表 3: $N=100, K=2 (\pm 1)$, $q = 2/3, \beta = 0.02$: 三窗条件统计 (MC) ($\Delta = 48$). A/B/C/D: $A=(C=0, J=0)$, $B=(C \geq 1, J=0)$, $C=(C=0, J \geq 1)$, $D=(C \geq 1, J \geq 1)$.

window	t_c	n	$\Pr(T \in W)$	$\Pr(C \geq 1 W)$	$\Pr(J \geq 1 W)$	A	B	C	D
peak1	31	1825	0.009	1.000	0.302	0.000	0.698	0.000	0.302
valley	95	1658	0.008	0.935	0.370	0.052	0.578	0.013	0.356
peak2	475	5980	0.030	0.125	0.280	0.643	0.076	0.231	0.049

表 4: $N=100, K=4 (\pm 1, \pm 2)$, $q = 2/3, \beta = 0.02$: 三窗条件统计 (MC) ($\Delta = 22$). A/B/C/D: $A=(C=0, J=0)$, $B=(C \geq 1, J=0)$, $C=(C=0, J \geq 1)$, $D=(C \geq 1, J \geq 1)$.

读图要点 (机制链条)

- **第一峰由 shortcut 主导:** 在 $K = 2$ 与 $K = 4$ 的 peak1 窗口里均有 $\Pr(C \geq 1 | W) \approx 1$ (表中 $P(C \geq 1 | W)$ 一列接近 1), 对应“较早到达 src 并使用 shortcut”的快路径族, 因此形成早峰 ($K = 2$ 的 $t_1 = 51$; $K = 4$ 的 $t_1 = 31$)。
- **谷底是“族群权重切换”的过渡区:** valley 窗口里 $C = 0$ 的比例开始上升, 且 $K = 4$ 中 $J \geq 1$ 的比例也明显升高, 表示“接近吸收点但被 overshoot 打断”的延迟路径开始大量出现。
- **第二峰主要由 nonshortcut ($C = 0$) 贡献:** 在 peak2 窗口, $K = 2$ 已有 $C = 0$ 占主导; 而在 $K = 4$ 的 peak2 中 $C = 0$ 仍占绝对多数 (A+C 两类之和显著大于 B+D), 说明慢峰对应“未有效利用 shortcut”的路径族在较晚时间尺度聚集。
- **$K = 4$ 的关键差别来自 jump-over 子类:** 对 $K = 4$ 的 peak2, nonshortcut 内部进一步被分成 A ($C = 0, J = 0$) 与 C ($C = 0, J \geq 1$) 两支, 其中 C 类在慢峰窗口内占据可观权重, 直接证实“跨过吸收点但不落点”不是罕见噪声, 而是慢尺度结构的组成部分。

从可发表的“混合路径族”角度, 这对应一个更细的分解:

$$f(t) = \sum_{(c,j) \in \{0,1\}^2} \Pr(C \geq 1 = c, J \geq 1 = j) f(t | C \geq 1 = c, J \geq 1 = j),$$

其中 $K = 2$ 情形退化为 $J \equiv 0$ 的二类混合, 而 $K = 4$ 则需要进一步区分“是否发生 jump-over”才能解释慢峰结构的差异来源。

为什么 jump-over 会改变慢尺度? 在 $K = 2$ 中, 任何“跨过 target”的尝试都会必然落在 target (因为步长只有 1), 因此一旦到达 target 的邻域, 吸收几乎只取决于是否真正落点。而在 $K = 4$ 中, 局部接近 target 时若走到 $\text{target} \pm 1$, 一次 ∓ 2 的环上跳会把行走者送到 target 的另一侧而不吸收, 这相当于给“即将吸收”的局部路径插入一次额外的回返代价 (甚至可能多次发生)。因此 jump-over 会把一部分原本应当更早吸收的轨迹推迟到更晚的时间尺度, 改变 slow 族的形状/权重, 从而影响整体 $f(t)$ 的双峰结构。

8.2 隔离 jump-over 的对照: jumpover 视为吸收

为把“ $K = 4$ 允许 ± 2 导致扩散尺度变化”与“jump-over (跨过吸收点但不落点) 导致的延迟”区分开, 我们构造一个反事实对照模型: 仍然允许 ± 2 (因此步长分布与 $K = 4$ 相同), 但若某一步发生 jump-over, 则视为吸收 (等价于把吸收机制扩展为“到达或跨过 target”)。下图叠加对比了原始模型与对照模型的精确 $f(t)$:

8.3 更大 shortcut 强度: $K = 4, N = 100, \beta = 0.15$

为对齐“ β 变大压掉慢峰”的既有直觉, 这里给出 $K = 4$ 在更大 β 下的代表性双峰 (仍满足 paper/macro 判据): 可见随 β 增大, peak1 的窗口质量显著增加 (更大质量更早走上 shortcut), 但在 $K = 4$ 中仍存在可分辨的慢尺度结构 (由 nonshortcut 及其 jump-over 子类贡献), 直到 β 增大到某一阈值后才不再满足 paper 判据 (见 β 扫描)。

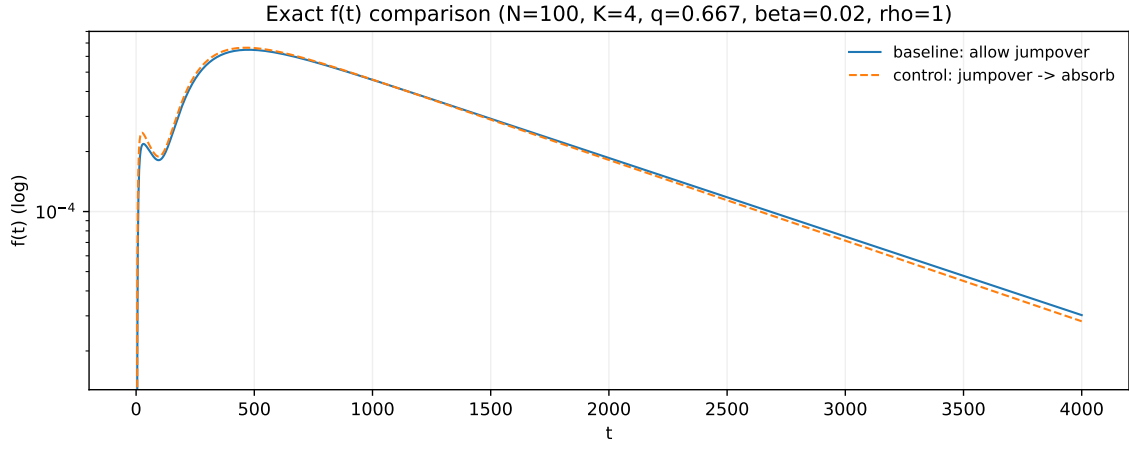


图 12: $K = 4$ ($N = 100, q = 2/3, \beta = 0.02$): 基线模型 (允许 jump-over) 与对照模型 (jump-over $\rightarrow$ 吸收) 的精确 $f(t)$ 叠加对比 (时间域 master-equation)。该对照用于隔离 “jump-over 不落点” 机制对时间尺度结构的影响。

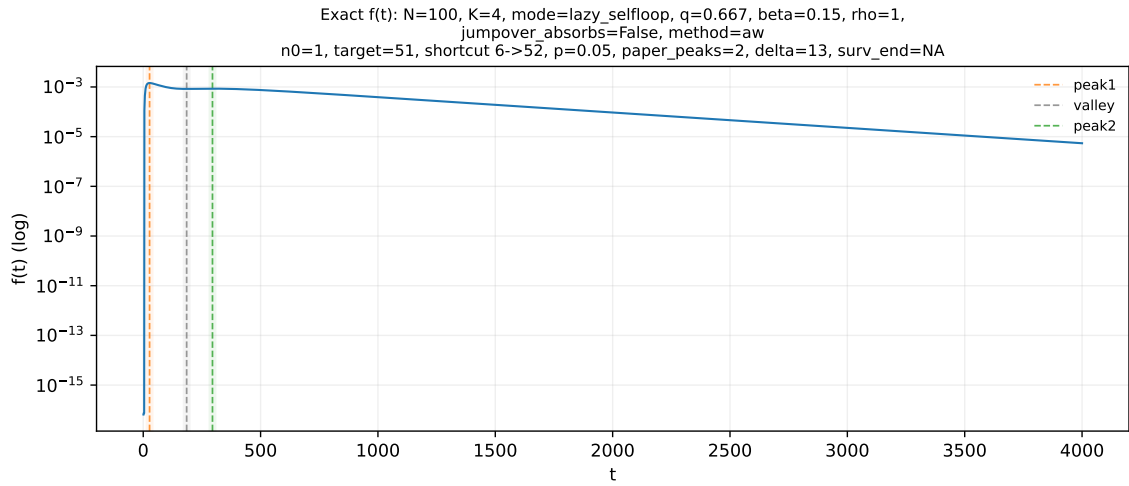


图 13: $K = 4$: AW 反演得到的精确 $f(t)$ ($N = 100, q = 2/3, \beta = 0.15$)。

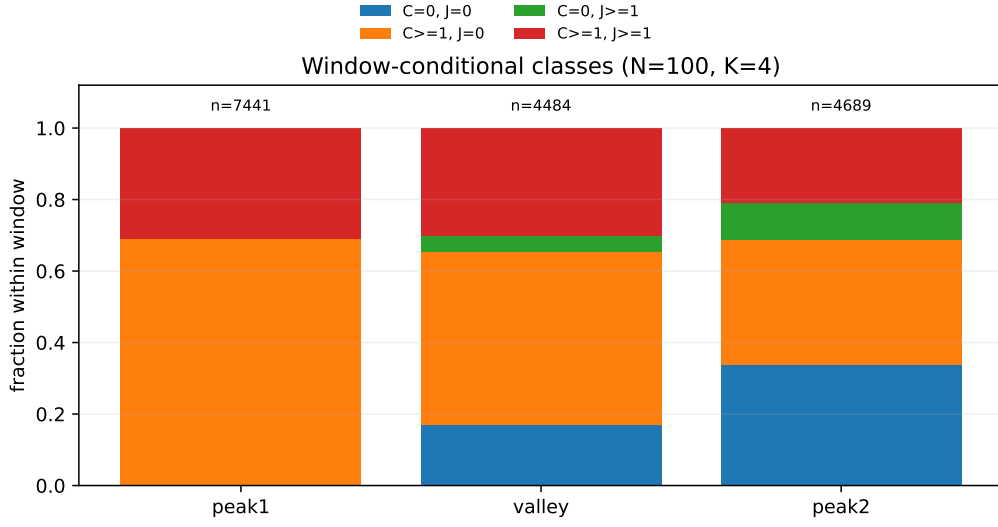


图 14: $K = 4$: 三段窗口内的 (C/J) 四类比例 ($N = 100, q = 2/3, \beta = 0.15$)。

Time-conditional curves ($N=100, K=4, \beta=0.15, \min_n=50, \text{smooth}=21$)

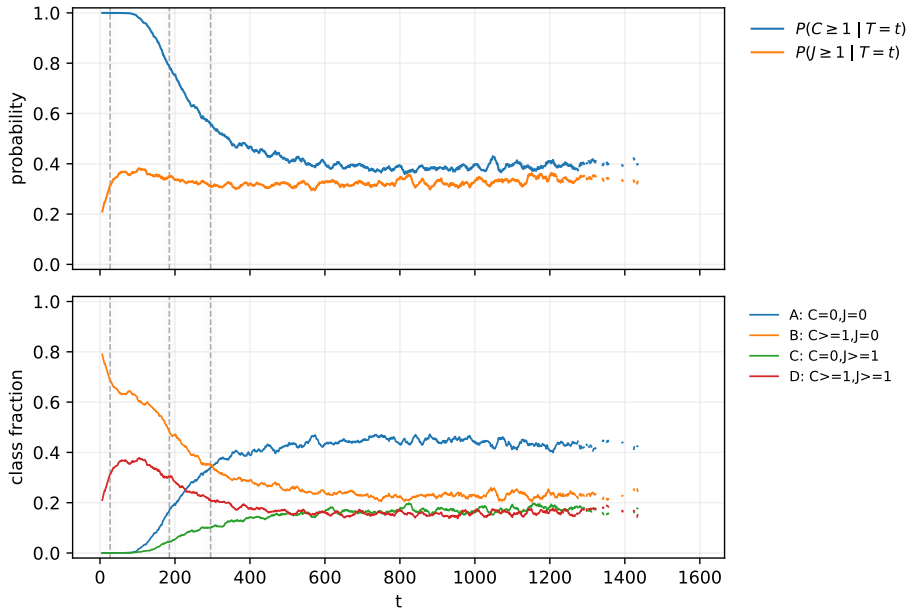


图 15: $K = 4$ ($\beta = 0.15$): 全时间条件曲线 (对照 $\beta = 0.02$, 用于展示随 shortcut 强度变化时机制权重如何在时间轴上迁移)。

9 可复现性：脚本与命令

本报告全部结果由以下脚本生成：

- 精确分布 + 扫描: `code/jumprover_bimodality_pipeline.py`
- 扫描可视化: `code/plot_scan_summaries.py`
- β 扫描表格: `code/make_beta_scan_table.py`
- 代表点窗口统计表: `code/make_case_window_table.py`

建议复现实验流程（在本报告目录下）：

```
# N scan (beta fixed)
```

```
python3 code/jumprover_bimodality_pipeline.py scan-n \
  --K 2 --N-min 10 --N-max 200 --N-step 2 \
  --beta 0.02 --q 0.6666667 \
  --target auto --sc-src auto+5 --sc-dst auto_target+1 \
  --out data/scan_N_K2_beta002.csv

python3 code/jumprover_bimodality_pipeline.py scan-n \
  --K 4 --N-min 10 --N-max 200 --N-step 2 \
  --beta 0.02 --q 0.6666667 \
  --target auto --sc-src auto+5 --sc-dst auto_target+1 \
  --out data/scan_N_K4_beta002.csv
```

```
# beta scan (N fixed)
```

```
python3 code/jumprover_bimodality_pipeline.py scan-beta \
  --N 100 --K 4 --q 0.6666667 --target auto \
  --sc-src auto+5 --sc-dst auto_target+1 \
  --betas 0 0.0005 0.001 0.002 0.005 0.01 0.02 0.03 \
  0.05 0.07 0.1 0.15 0.2 0.3 0.5 1 \
  --out data/scan_beta_N100_K4.csv
```

```
# representative case analysis (exact + MC)
```

```
python3 code/jumprover_bimodality_pipeline.py analyze \
  --N 100 --K 4 --beta 0.02 --q 0.6666667 \
  --exact-method aw --max-t-plot 4000 \
  --target auto --sc-src auto+5 --sc-dst auto_target+1 \
  --n-walkers 200000 --seed 0 \
  --out-prefix data/cases/N100_K4_beta002/N100_K4_beta002
```

```
# make window-stat tables (from the produced summary.json)
```

```
python3 code/make_case_window_table.py \
  --summary data/cases/N100_K4_beta002/N100_K4_beta002.summary.json \
  --out tables/case_window_stats_N100_K4_beta002.tex \
```

```
--caption "N=100, K=4 ( $\pm 1, \pm 2$ ) ,  $q=2/3, \beta=0.02$ : \
三窗条件统计 (MC) " \
--label tab:case-window-N100-K4-beta002

# control comparison: jumpover -> absorb (exact-only overlay)
python3 code/jumpover_bimodality_pipeline.py compare-jumpover \
--N 100 --K 4 --beta 0.02 --q 0.6666667 \
--target auto --sc-src auto+5 --sc-dst auto_target+1 \
--out-prefix \
data/cases/N100_K4_beta002_jumpover_control/N100_K4_beta002_jumpover_control
```