二维长方形域首达时间双峰研究

双 Target 宽度-起点扫描与单 Target 走廊双峰条件

结论先行

本报告研究的问题是：**当二维空间不是 $N \times N$，而是一个“躺着的长方形”时，在什么条件下首达时间分布会出现双峰**。

我们给出两类可复现实验：

1. **双 Target（两端吸收）**：把两个 target 放在长方形左右端点附近，起点偏向左端；设计一条短路径（快通道）和一条长路径（慢通道），扫描**短边宽度** W_y 与**起点位置** x_0，得到双峰相图（图 2）。
2. **单 Target（走廊反射墙）**：起点与 target 放在左右端点附近，中间用反射墙制造走廊，并在走廊内加入 local bias；对比**是否叠加全局 bias**，扫描 W_y，得到双峰相图（图 14）。

数学机理上，两类构造都可归结为同一模式：**总首达分布是两条“通道首达分量”的和**，当两分量的主峰时刻分离且权重不过于极端时，总曲线出现两个局部极大。

1 模型定义与坐标约定

长方形域 状态空间为

$$\Omega = \{0, \dots, L_x - 1\} \times \{0, \dots, W_y - 1\},$$

其中 L_x 为长边长度，W_y 为短边宽度（本报告扫描的主变量）。

基本惰性随机游走 在内部格点，无偏置基线转移为

$$P((x,y) \to (x \pm 1, y)) = \frac{q}{4}, \tag{1}$$

$$P((x,y) \to (x, y \pm 1)) = \frac{q}{4}, \tag{2}$$

$$P((x,y) \to (x,y)) = 1 - q. \tag{3}$$

反射边界：越界尝试的概率质量加回停留概率，故每行仍归一。

local bias 规则 在带箭头的格点，将停留概率的 δ 比例转移到箭头方向：

$$\Delta = \delta\, p_{\text{stay}}, \qquad p_{\text{stay}} \leftarrow p_{\text{stay}} - \Delta, \qquad p_{\text{arrow}} \leftarrow p_{\text{arrow}} + \Delta.$$

global bias（可选） 用 (b_x, b_y) 改变四方向概率，并重新归一保证总移动质量为 q（见脚本实现）。

2 图形阅读指南

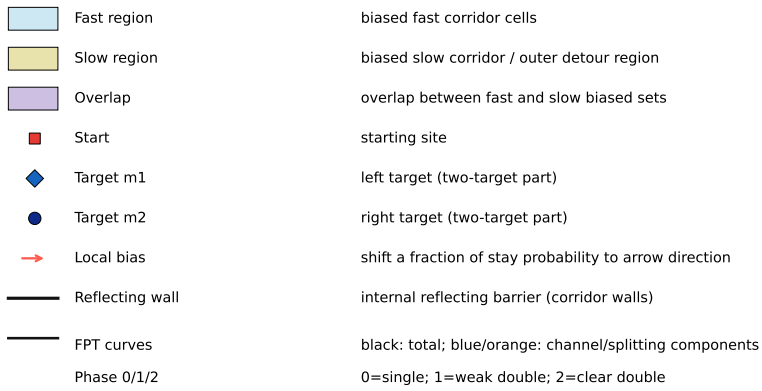


图 1: 统一符号图例面板（由同一绘图脚本输出）：用于校准颜色、标记、曲线与相图分类的一致性。

图中元素	图中示意	含义（全报告统一）
米白背景		长方形反射边界晶格。
快通道区域		快通道（fast corridor）覆盖单元。
慢通道/外域		慢通道或外域（outer detour）覆盖单元。
重叠区域		多通道叠加覆盖。
反射墙		内部反射 barrier（走廊墙）。
local bias 箭头	→	将停留概率的一部分转移到箭头方向。
热图色标		条件占据概率 $P(X_t = n \mid T > t)$。
总首达曲线		总首达 PMF（two-target 为 F_{any}；one-target 为 F）。
通道/分量曲线		splitting 或通道分解的分量。
相图类别 0/1/2	0 1 2	0=single；1=weak double；2=clear double。

表 1: 图示元素逐项说明。

3 研究 I：双 Target（两端吸收）

3.1 构造与扫描变量

将两个吸收点放在长方形左右端点附近（同一中线 $y = y_{\text{mid}}$），起点在中线且偏向左端：

$$m_1 \approx (1, y_{\text{mid}}), \quad m_2 \approx (L_x - 2, y_{\text{mid}}), \quad n_0 = (x_0, y_{\text{mid}}).$$

设计两条路径：

- 快通道：$n_0 \to m_1$ 的短直线路径；
- 慢通道：$n_0 \to m_2$ 的长直线路径（沿 x 方向距离更长）。

本节默认将 local bias 仅放在上述两条直线“stream”（一格厚度）上，因此**箭头方向不出现拐弯**，同时 biased 格点数显著减少。扫描 (W_y, x_0) 并用统一判据将结果分成 0/1/2 三类。

3.2 扫描相图与概览表

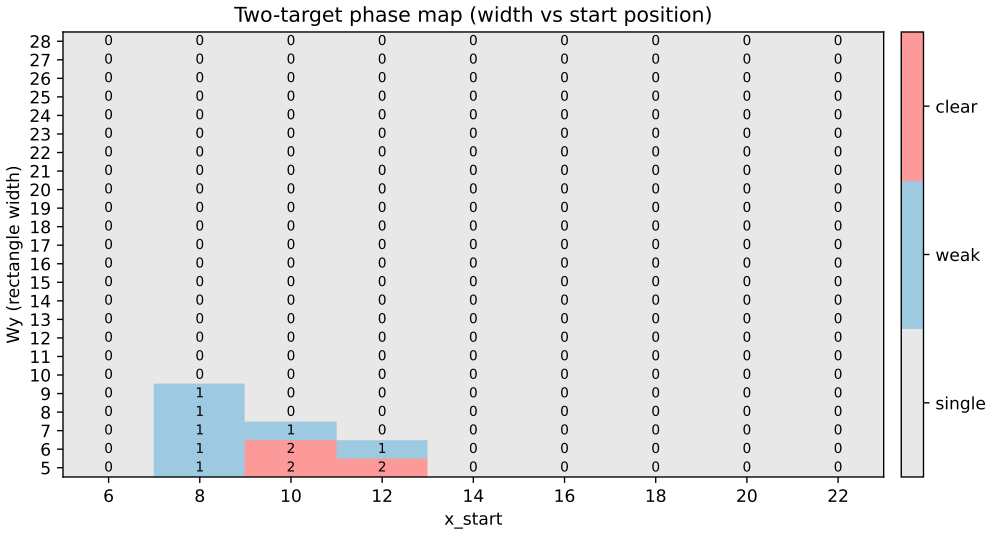


图 2: 双 Target：(W_y, x_0) 分类相图。

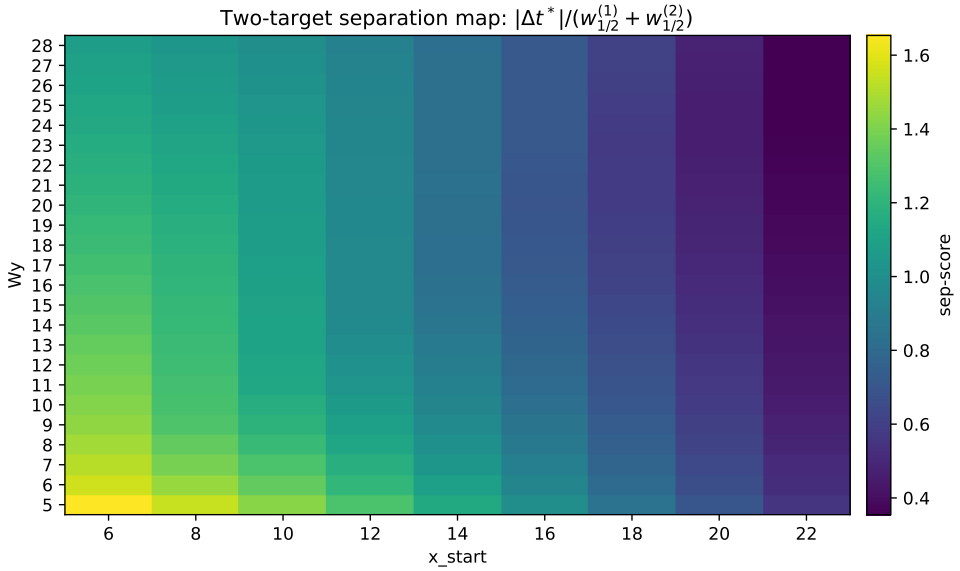


图 3: 双 Target：分离度热图 $|\Delta t^*|/(w_{1/2}^{(1)} + w_{1/2}^{(2)})$。

3.3 代表性案例：配置图与双峰图

3.4 宽度扫描的分支演化对比（固定 $x_0 = 10$）

为了直接回答“不同长方形宽度下双峰如何变化”，我们固定 straight-stream 构造，并在同一分支 $x_0 = 10$ 上按宽度抽取关键跃迁案例（$W_y \in \{5, 6, 7, 8, 14, 24\}$）：前两例是 clear-double，第 3 例是 weak-double（phase=1），后 3 例用于展示失稳后的单峰形态。

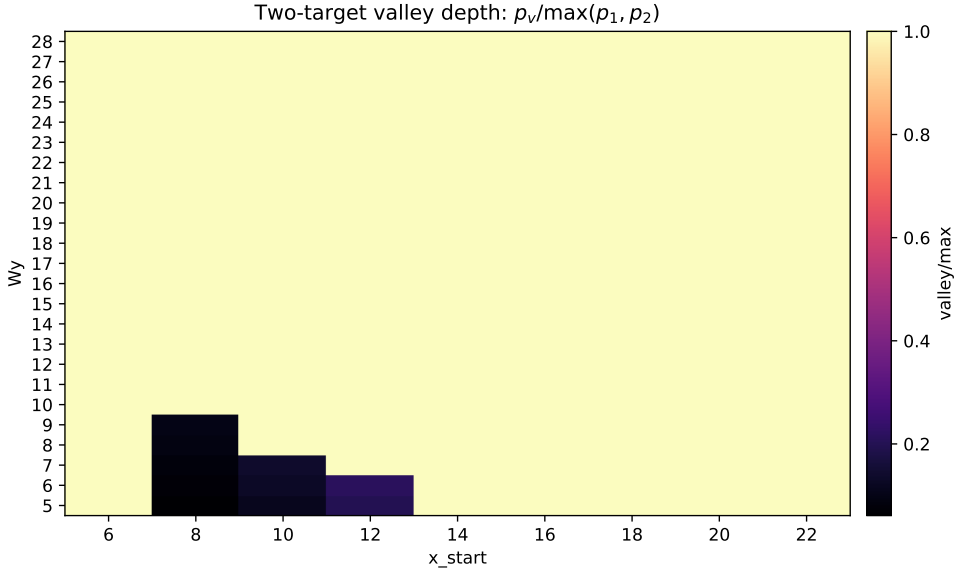


图 4: 双 Target：谷深热图 $p_v/\max(p_1, p_2)$。

W_y	n(single)	n(weak)	n(clear)	best $\min(p_1, p_2)$
5	6	0	3	0.456
6	6	0	3	0.444
7	7	0	2	0.411
8	8	0	1	0.374
9	8	0	1	0.364
10	9	0	0	-
11	9	0	0	-
12	9	0	0	-
13	9	0	0	-
14	9	0	0	-
15	9	0	0	-
16	9	0	0	-
17	9	0	0	-
18	9	0	0	-
19	9	0	0	-
20	9	0	0	-
21	9	0	0	-
22	9	0	0	-
23	9	0	0	-
24	9	0	0	-
25	9	0	0	-
26	9	0	0	-
27	9	0	0	-
28	9	0	0	-

表 2: 双 Target：按宽度 W_y 汇总的相图计数与最佳权重平衡度。

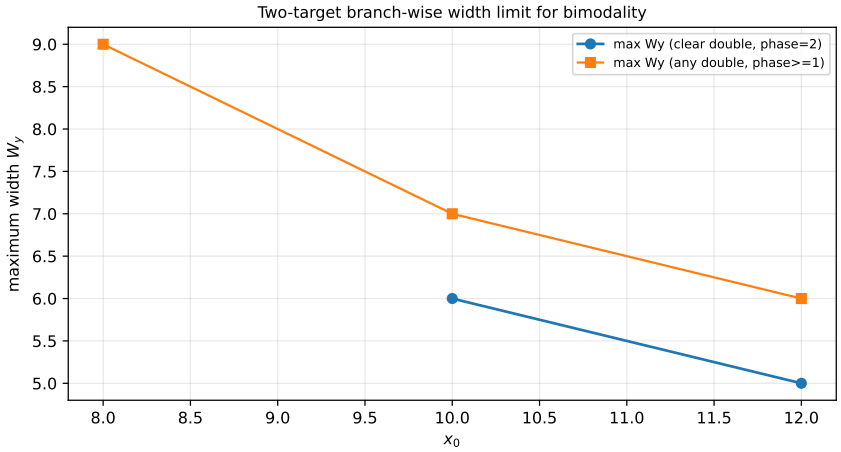


图 5: 双 Target：关键起点分支（$x_0 = 8, 10, 12$）在扩展宽度扫描（到 $W_y = 60$）下的双峰宽度上限（phase=2 与 phase≥1）。

x_0	clear interval(s)	upper clear branch	first loss width	phase at loss
8	-	-	-	-
10	5-6	5-6	7	1
12	5	5	6	1

表 3: 双 Target：主分支（$x_0 = 8, 10, 12$）在扩展宽度扫描下的 clear-double 区间与“随宽度增大后的首个失稳宽度”。



图 6: 双 Target：代表性 clear-double 配置总览（环境示意）。图中叠加逐格晶格线，并每 5 格加深一条参考线，便于直接读出格点尺度与通道长度。

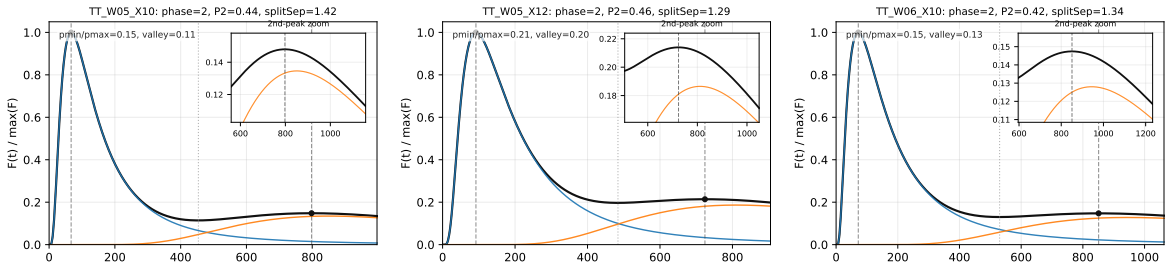


图 7: 双 Target：代表性 clear-double 案例的总首达曲线与 splitting 分解（统一归一化、峰谷标注，并附第二峰局部放大），对应本次筛选得到的 clear 分支。

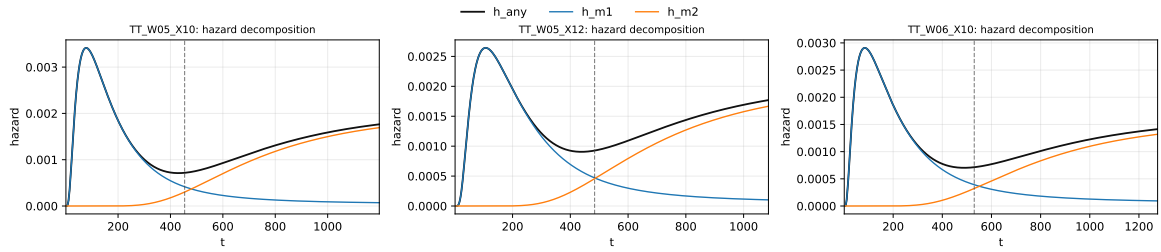


图 8: 双 Target：hazard 分解（对照 $h = h_1 + h_2$，横轴自适应覆盖第二峰时标）。虚线为谷底附近时刻。

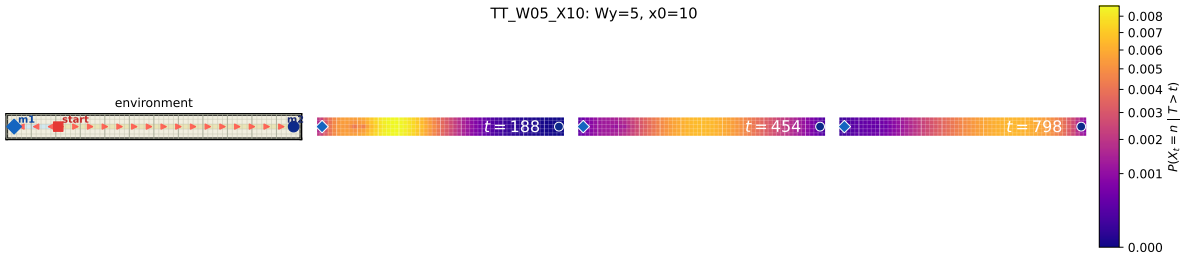


图 9: 双 Target：代表案例 A 的环境 + 条件占据热图三帧（保持几何等比例，不做拉伸）。

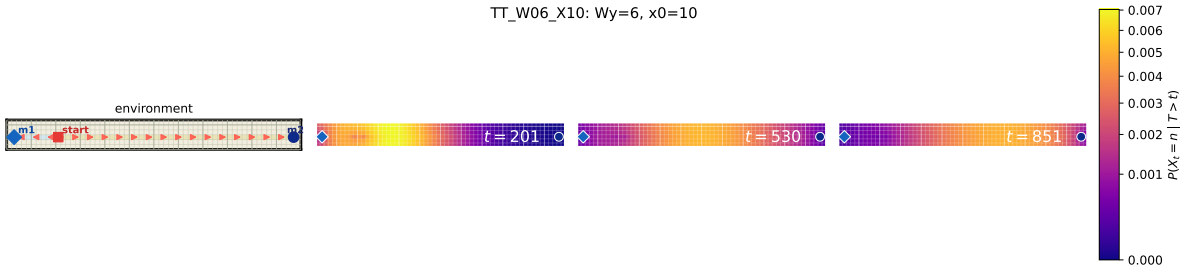


图 10: 双 Target：代表案例 B 的环境 + 条件占据热图三帧（保持几何等比例，不做拉伸）。

ID	W_y	x_0	phase	$P(m_1)$	$P(m_2)$	sep-score
TT_W05_X10	5	10	2	0.561	0.439	1.42
TT_W05_X12	5	12	2	0.544	0.456	1.29
TT_W06_X10	6	10	2	0.575	0.425	1.34

表 4: 双 Target：代表案例关键指标（splitting 权重、分离度、分类 phase）。

ID	W_y	x_0	phase	t_{p1}	t_{p2}	$p_{\min}/p_{\max}$	valley/max
TT_W05_X10	5	10	2	67	798	0.148	0.114
TT_W06_X10	6	10	2	72	851	0.148	0.130
TT_W07_X10	7	10	1	78	881	0.148	0.141
TT_W08_X10	8	10	0	-	-	-	-
TT_W14_X10	14	10	0	-	-	-	-
TT_W24_X10	24	10	0	-	-	-	-

表 5: 双 Target：固定分支宽度扫描指标（含 phase、$t_{p1}, t_{p2}, p_{\min}/p_{\max}$, valley/max）。

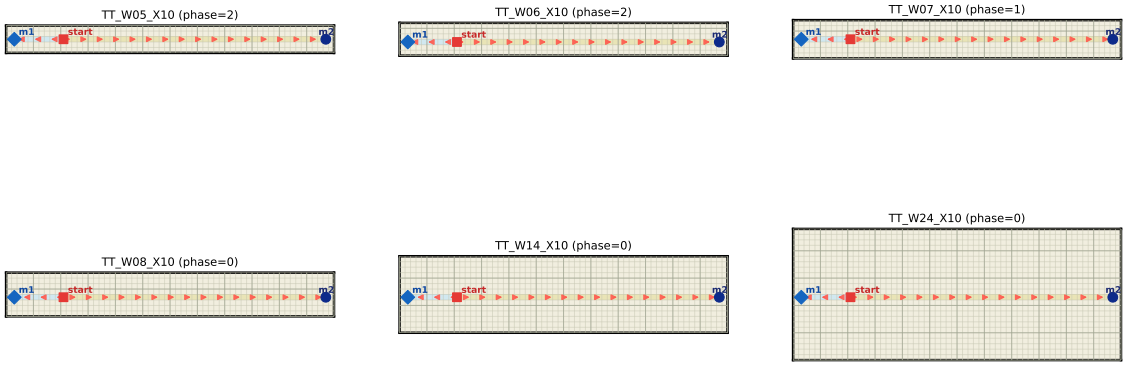


图 11: 双 Target：固定 $x_0 = 10$ 分支下，不同 W_y 的环境配置对比。

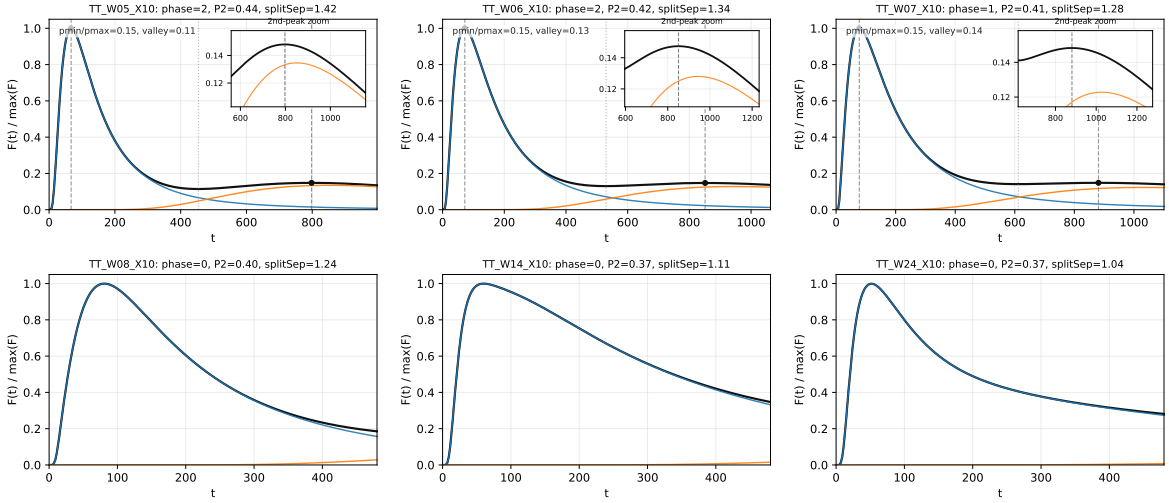


图 12: 双 Target：固定 $x_0 = 10$ 分支下，不同宽度的首达曲线对比（归一化显示；仅在检测到第二峰时附局部放大）。

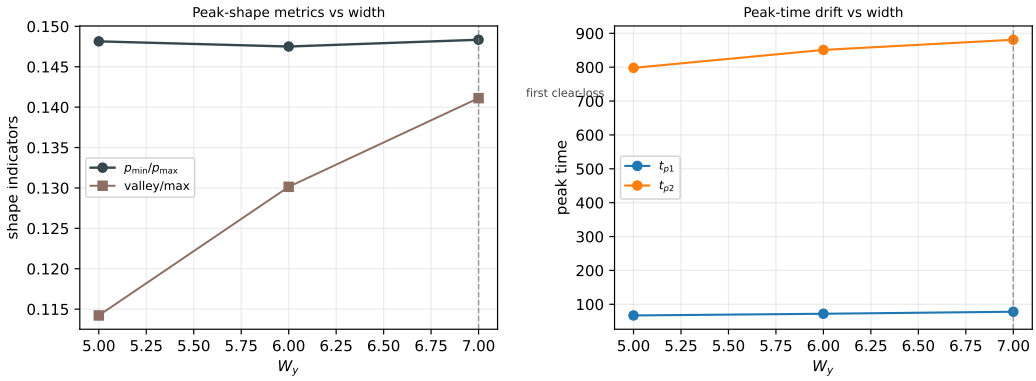


图 13: 双 Target：宽度变化下的双峰形状指标与峰时刻漂移。

从图 12 与图 13 可见：在固定分支 $x_0 = 10$ 上，$W_y = 5, 6$ 保持 clear-double；到 $W_y = 7$ 先退化为 weak-double (phase=1)；从 $W_y = 8$ 起不再通过鲁棒双峰判据 (phase=0)，且在更宽区间 (如 $W_y = 14, 24$) 保持单峰。这里的 splitSep (分离度) 来自 splitting 分量模态时刻，不等同于 "总曲线一定双峰"；phase 仍以总首达曲线的双峰检测 + 谷深/权重门槛联合判定。结合图 5 与表 3，临界点仍是分支依赖：$x_0 = 8$ 在当前判据下无 clear 区间；$x_0 = 10$ 的 clear 区间为 $W_y = 5$–6 ($W_y = 7$ 首次失稳，phase=1)；$x_0 = 12$ 的 clear 区间为 $W_y = 5$ ($W_y = 6$ 首次失稳，phase=1)。因此不存在统一的全局临界宽度。这里 "临界" 指的是**宽度临界**，不是单一时间临界；峰时刻量级已在表 5 给出 (例如固定分支 $x_0 = 10$ 上，$W_y = 6$ 约为 $(t_{p1}, t_{p2}) = (72, 851)$，$W_y = 7$ 约为 $(78, 881)$)。

3.5 数学机理：splitting 分解与双峰判据

将两个 target 视为吸收态，其余为 transient。按行随机约定，转移矩阵分块为

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \qquad R = [r_1 \ r_2].$$

初始分布为 α (起点 one-hot)。第 t 步第一次命中 m_1 (此前未命中任一 target) 的 splitting 分布为

$$f_1(t) = \alpha Q^{t-1} r_1, \qquad f_2(t) = \alpha Q^{t-1} r_2.$$

因此总首达严格分解为

$$F_{\text{any}}(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

当 f_1, f_2 的主峰时刻分离，且权重 $p_i = \sum_t f_i(t)$ 不极端时，总曲线出现两个局部极大。本报告使用的 "clear double" 判据同时约束：(i) 检测到两个主峰；(ii) 条件主峰时刻分离度足够大；(iii) $\min(p_1, p_2)$ 不过小；(iv) 谷底足够深。

4 研究 II：单 Target (走廊反射墙 + local bias)

4.1 构造与扫描变量

起点与 target 放在长方形左右端点附近 (同一中线)。中间 $x \in [x_0, x_1]$ 放置两条反射墙，使得中线附近形成走廊；走廊内部加入向右的 local bias。对比三种情形：无全局漂移 $b_x = 0$、顺向漂移 $b_x > 0$ (朝向 target)、以及逆向漂移 $b_x < 0$ (背离 target)，并扫描 W_y。为避免 "起点/终点摆放" 本身掩盖宽度效应，我们先在候选 (x_s, x_t) 与一组代表性 b_x 上做预扫描，再固定锚点后扫描宽度。本次运行自动选出的锚点与对应 clear 区间见表 7 (由脚本生成，避免人工抄写漂移)。

4.2 扫描相图与概览表

由表 6 与表 7 可直接读出：在本次选定锚点 $(x_s, x_t) = (7, 58)$ 下，**clear-double** (phase 2) 只在 $b_x = -0.08$ 且 $W_y = 8, 10, 12, 14, 16$ 出现；从 $W_y = 18$ 起退化为 weak-double (phase 1)。当 $b_x = -0.12$ 时，全宽度范围均为 weak-double (phase 1)；当 $b_x \in \{-0.04, 0, 0.08\}$ 时，全宽

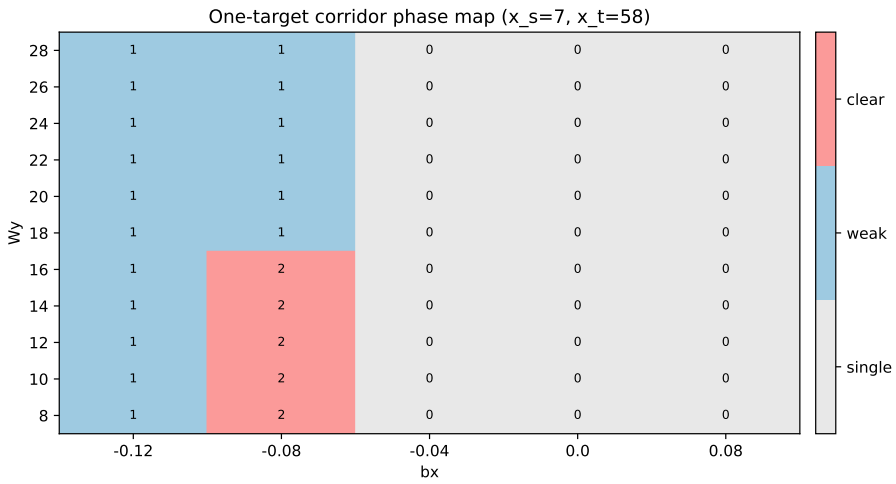


图 14：单 Target：(W_y, b_x) 分类相图。

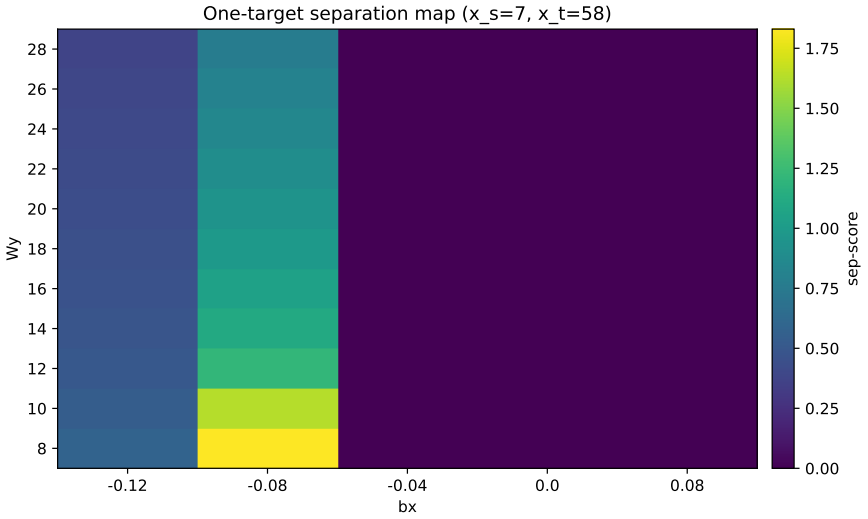


图 15：单 Target：峰分离度热图。

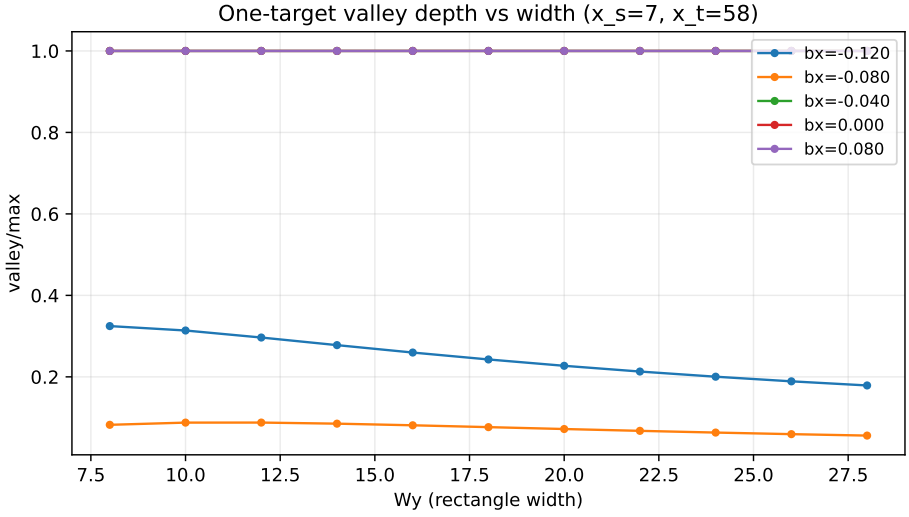


图 16：单 Target：谷深随 W_y 的变化（不同 b_x 叠加对比）。

W_y	$b_x = -0.12$	$b_x = -0.08$	$b_x = -0.04$	$b_x = 0.00$	$b_x = 0.08$
8	1	2	0	0	0
10	1	2	0	0	0
12	1	2	0	0	0
14	1	2	0	0	0
16	1	2	0	0	0
18	1	1	0	0	0
20	1	1	0	0	0
22	1	1	0	0	0
24	1	1	0	0	0
26	1	1	0	0	0
28	1	1	0	0	0

表 6: 单 Target：每个 W_y 在不同 b_x 下的 phase 分类。

x_s	x_t	b_x^*	W_y^{ref}	phase(ref)	clear interval(s)	first loss
7	58	-0.080	12	2	8-16 (step=2)	18

表 7: 单 Target：锚点预扫描结果摘要（固定锚点后再做宽度扫描）。

度范围均为 single-peak（phase 0）。因此在该单 target 走廊构造中，要得到稳定 clear-double，需要**中等强度且逆向（背离 target）的全局偏置**。同样地，此处“临界”也是宽度意义（该锚点下 $b_x = -0.08$ 的首个失稳宽度为 $W_y = 18$）；对应峰时刻量级可在扫描输出表/CSV 中读取。

这里需要区分：图 16 是“指标曲线图”，不是配置图。配置差异在图 17 里展示。除部分面板的 W_y 不同外，更关键差异是全局偏置 b_x（标题与小箭头给出方向），它会改变“走廊通道/外域通道”的权重分配，从而影响图 18 中的双峰强度与峰时刻分离。

4.3 代表性案例：配置图与双峰图

ID	W_y	b_x	phase	valley/max	sep-score
OT_W16_bxm0p080	16	-0.080	2	0.081	1.05
OT_W28_bxm0p080	28	-0.080	1	0.056	0.77
OT_W28_bxm0p120	28	-0.120	1	0.179	0.37
OT_W08_bx0p000	8	0.000	0	-	0.00

表 8: 单 Target：代表案例关键指标（谷深、峰分离度与分类 phase）。

4.4 新增：走廊厚度敏感性（固定锚点）

为直接回答“1 格宽通道是否可形成 clear-double”，我们在固定锚点 $(x_s, x_t) = (7, 58)$ 下额外扫描走廊半宽 $h \in \{0, 1, 2, 3\}$（对应实际通道宽度 $2h + 1 = \{1, 3, 5, 7\}$ 格），其余参数沿用单 target 主扫描。

从图 22–23 与表 9 可见：当通道仅 1 格宽（$h = 0$）时，焦点偏置下通常只能到 weak-double；将通道加厚到 3/5/7 格后，clear-double 区间显著扩展。该结果说明“通道过窄”会削弱两时间

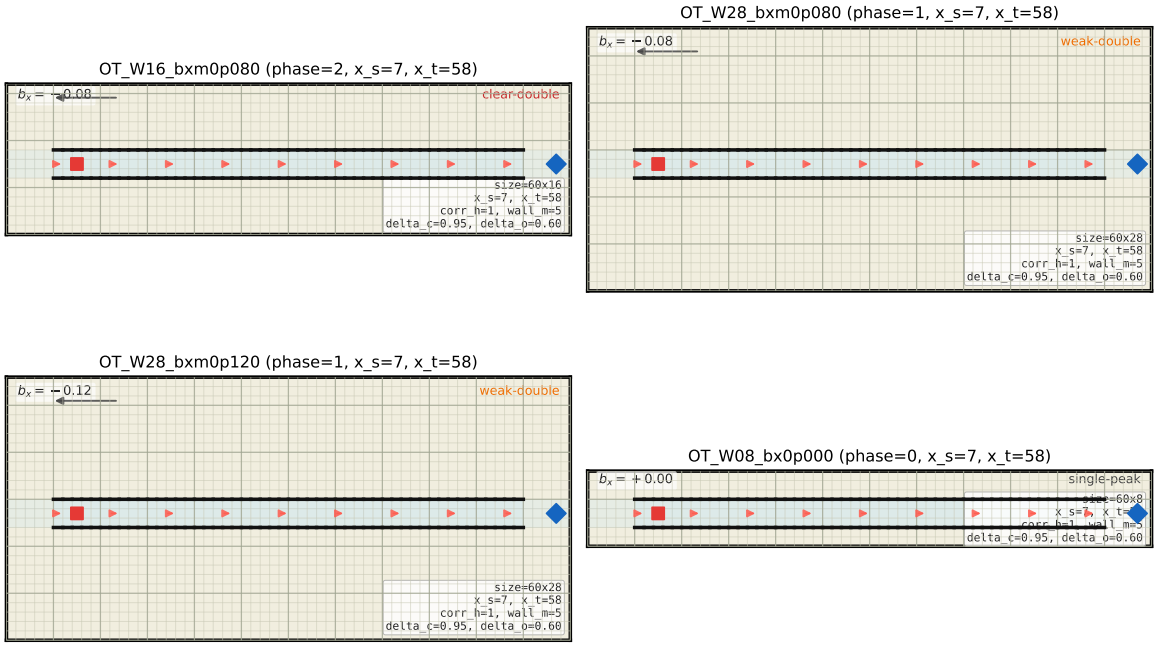


图 17: 单 Target: 代表性配置总览 (走廊 + 反射墙)。每个子图额外标注 b_x 及其方向, 并标记 clear-double / weak-double / single-peak 分类; 右下角配置卡给出尺寸、(x_s, x_t)、走廊半宽、墙边距与 $(\delta_{\text{core}}, \delta_{\text{open}})$。

h	band width	phase2 @ $b_x = -0.08$	first loss	phase≥ 1 @ $b_x = -0.12$	phase≥ 1 @ $b_x = +0.00$
0	1	-	-	8-28	-
1	3	8-16	18	8-28	-
2	5	8-26	28	8-28	-
3	7	10-28	-	10-28	-

表 9: 单 Target: 走廊厚度敏感性汇总 (固定锚点; 按不同偏置给出 clear/weak 区间与首失稳宽度)。

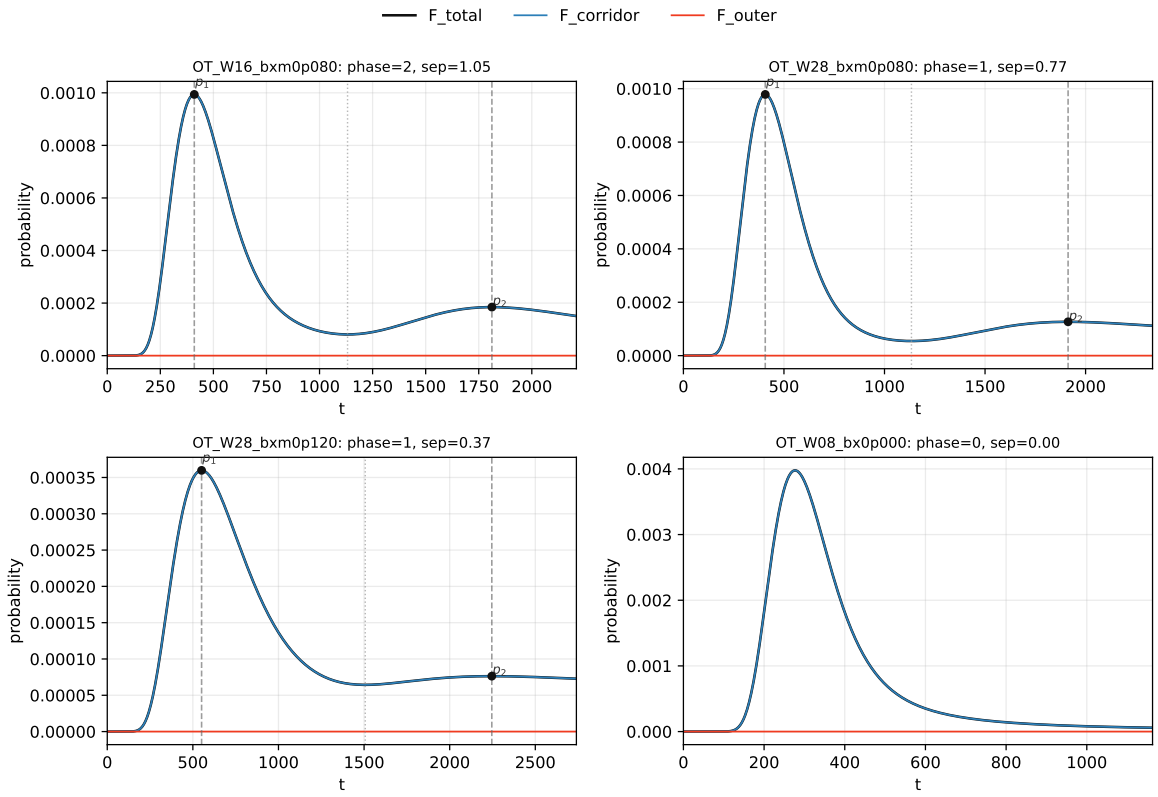


图 18: 单 Target: 代表性案例的首达曲线与 "走廊/外域" 通道分解。双峰子图均显式标注 p_1, p_2 两个峰位 (竖虚线 + 黑点); 若存在谷底则以灰色点线标出。各子图横轴采用自适应窗口 (在保证主峰可读的同时覆盖第二峰时标)。

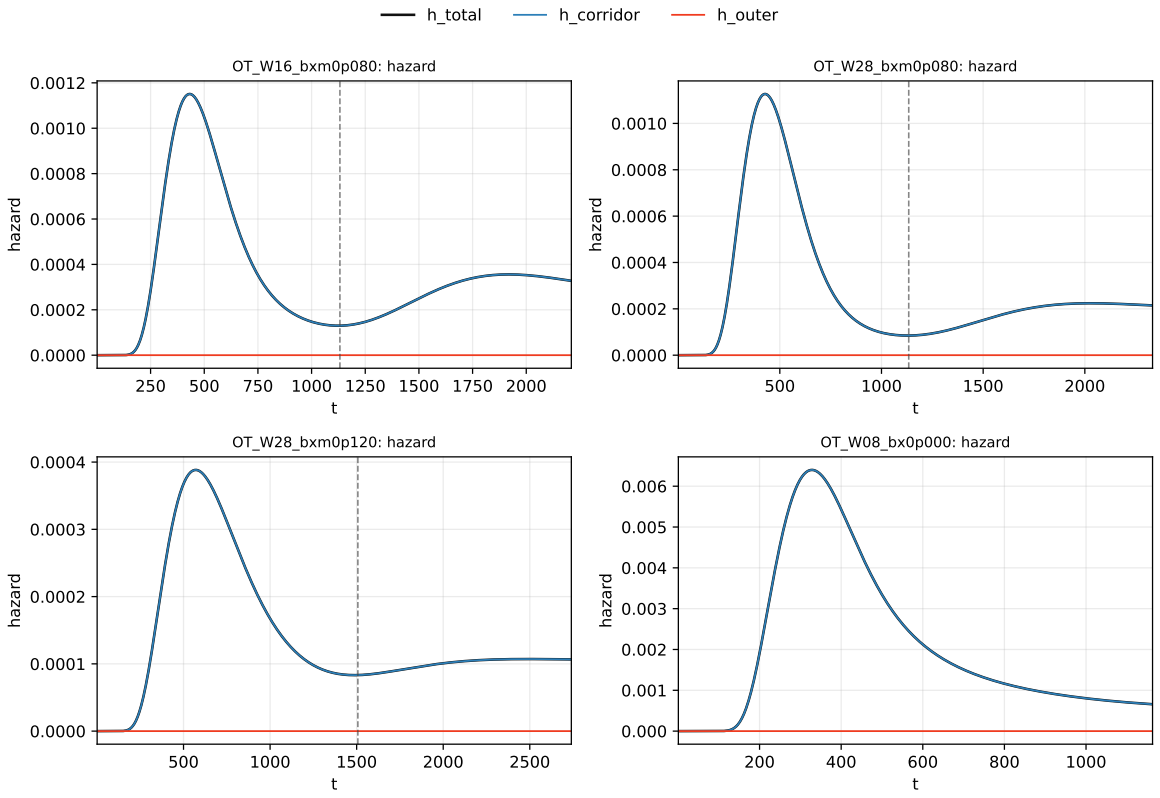


图 19：单 Target：hazard 分解（走廊/外域分量）。横轴与对应 FPT 子图一致地采用自适应窗口，避免长尾压缩早时峰结构。

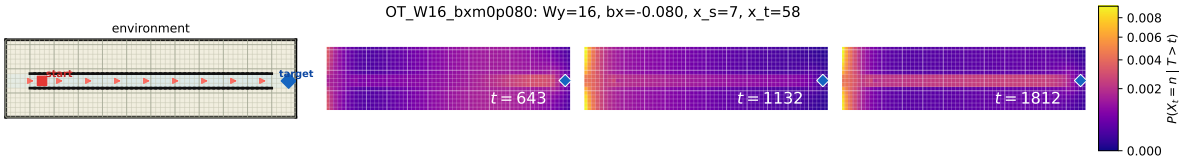


图 20：单 Target：代表案例 A 的环境 + 条件占据热图三帧。

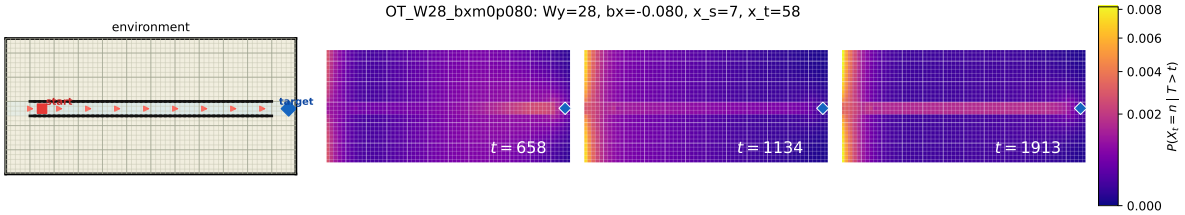


图 21：单 Target：代表案例 B 的环境 + 条件占据热图三帧。

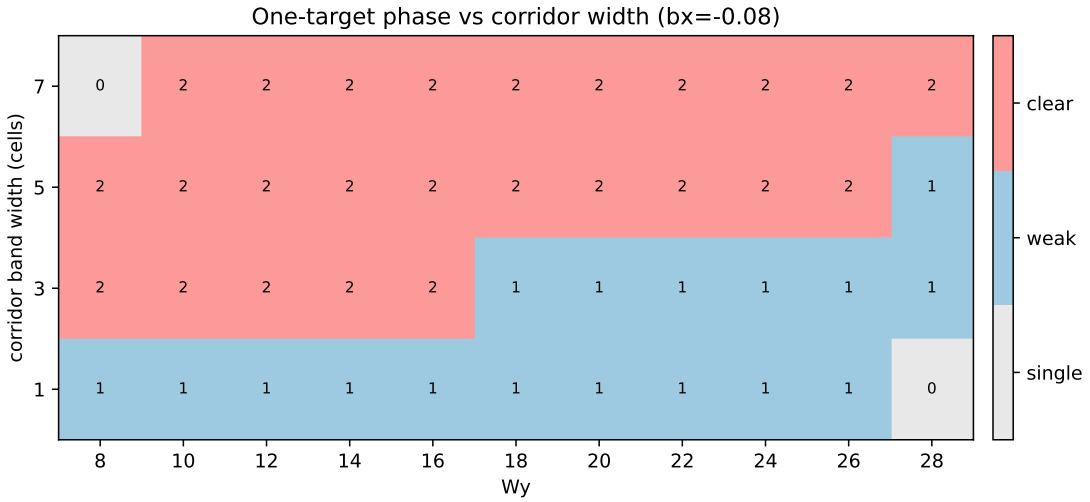


图 22: 单 Target：固定焦点偏置下，phase 随“长方形宽度 W_y 与通道宽度（格点数）”的变化。

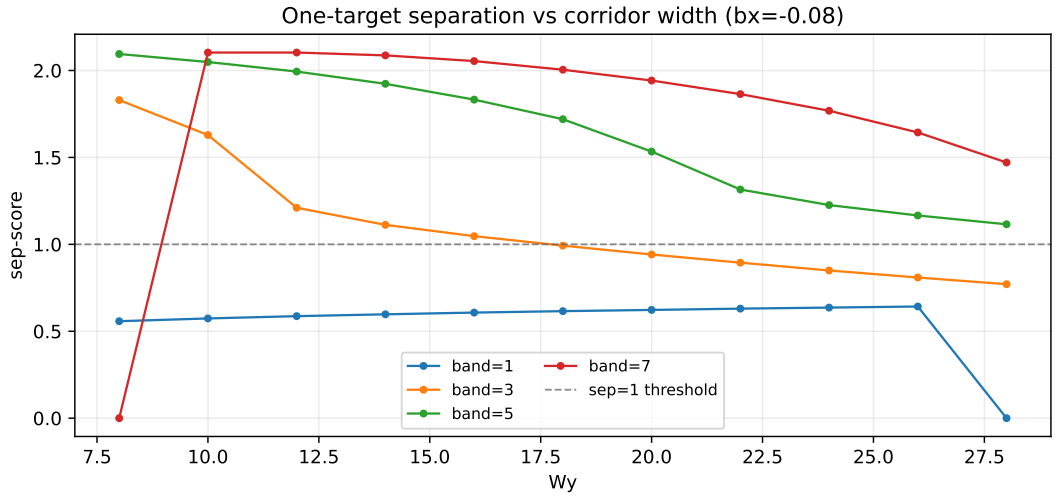


图 23: 单 Target：固定焦点偏置下，不同通道宽度的分离度随 W_y 变化（虚线为 sep = 1 参考线）。

尺度分离，而适度加厚可提升双峰稳健性。

4.5 新增：全局偏置向量扫描 (b_x, b_y)

在固定锚点与参考宽度（由脚本自动选取最接近设定值的 W_y）下，我们进一步扫描全局偏置向量 (b_x, b_y)，用于回答“除 x 向偏置外，y 向偏置是否也会改变双峰相位”。

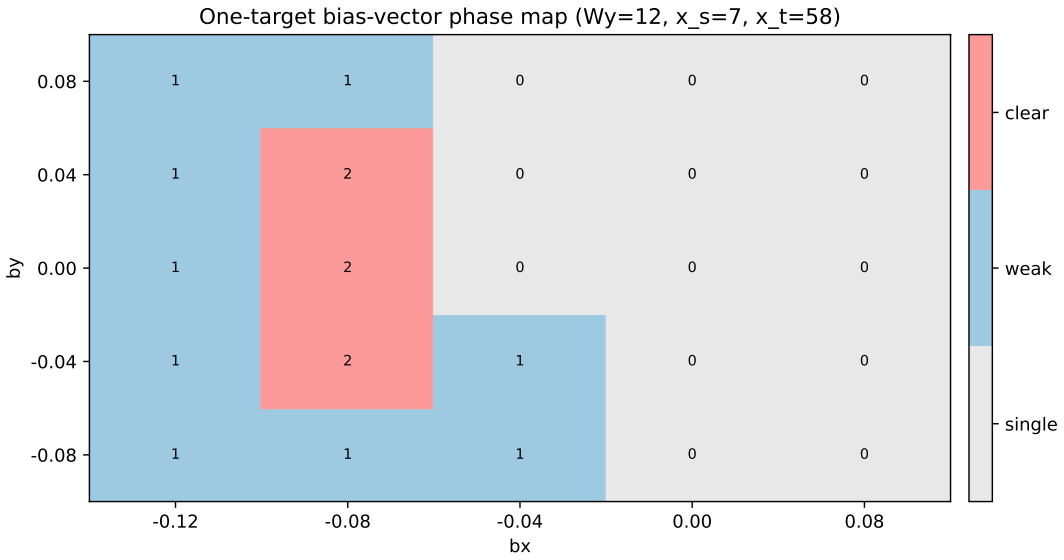


图 24: 单 Target：固定几何下 (b_x, b_y) 的 phase 相图。

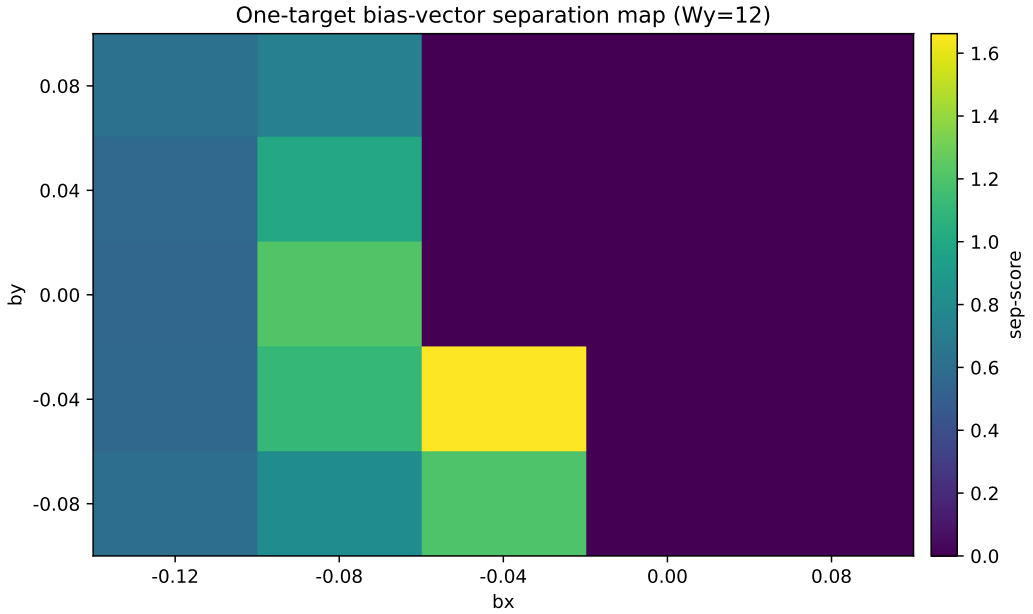


图 25: 单 Target：固定几何下 (b_x, b_y) 的峰分离度热图。

图 24–25 与表 10 可直接用来判断：在相同通道构造下，y 向偏置会改变“走廊-外域”通道权重竞争，从而使同一 b_x 下的双峰稳健性发生偏移。

b_y	$b_x = -0.12$	$b_x = -0.08$	$b_x = -0.04$	$b_x = 0.00$	$b_x = 0.08$
-0.08	1	1	1	0	0
-0.04	1	2	1	0	0
0.00	1	2	0	0	0
0.04	1	2	0	0	0
0.08	1	1	0	0	0

表 10: 单 Target：(b_x, b_y) 扫描的 phase 数值表（与图 24 对应）。

4.6 数学机理：吸收 flux 的两通道分解

对单 target，首达 PMF 可写为一步进入吸收态的总流量（flux）。令 $p_{t-1}(u)$ 为第 $t-1$ 步仍在 transient 的分布，则

$$f(t) = \sum_{u \in \mathcal{T}} p_{t-1}(u)\, P(u \to m).$$

将 transient 集合按 “走廊带内/走廊带外” 划分为两部分 $\mathcal{T} = \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$（互不交），得到严格恒等式

$$f(t) = f_{\mathcal{C}}(t) + f_{\mathcal{O}}(t), \qquad f_{\mathcal{C}}(t) = \sum_{u \in \mathcal{C}} p_{t-1}(u)\, P(u \to m).$$

因此如果 “走廊吸收分量” 与 “外域吸收分量” 的主峰时刻分离且权重合适，就会在总曲线上形成双峰；图 18 直接展示了该分解曲线。

复现命令

```
# 在仓库根目录先安装依赖（一次即可）
python3 -m venv .venv
source .venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt

cd reports/grid2d_rect_bimodality
python3 code/rect_bimodality_report.py --quick
python3 code/rect_bimodality_report.py

latexmk -xelatex -interaction=nonstopmode -halt-on-error \
  -auxdir=build -emulate-aux-dir grid2d_rect_bimodality_cn.tex
latexmk -pdf -interaction=nonstopmode -halt-on-error \
  -auxdir=build -emulate-aux-dir grid2d_rect_bimodality_en.tex
```