# 二维格点“黑板图风格”：走廊端点起止配置（反射边界）

## 结论与关键图示

- **起止点位于内墙段上下端点**：$S=(30,45)$，$T=(30,15)$，其余结构与“两墙 + 走廊箭头”基线一致。
- **未出现双峰**：$t_{p1}\approx 102$，valley ratio $=1$，仅见单峰 + 长尾；$t_{\max}=3000$ 时吸收概率 $\approx 0.604$。
- **小 $N$ 竖向矩形域同样失败**：$18\times 30$ 矩形、起止点仍在墙端点，$t_{p1}\approx 40$、valley ratio $=1$，$t_{\max}=2000$ 时吸收概率 $\approx 0.664$。
- **参数扫描结论**：仅改变 $g_y$、开口箭头强度或外圈 sticky 不会出现第二峰；只有在 外圈 *sticky* + 环形定向（人为加入慢通道）时才出现迟滞峰。
- **全套图组齐备**：环境示意、$P(n,t)$ 热图三帧、快/慢路径密度、FPT 曲线与峰谷放大、诊断图与通道分解。

## 参数表

| case | $N$ | $q$ | $g_x$ | $g_y$ | $t_{\max}$ | (start, target) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 60 | 0.8 | 0.00 | -0.20 | 3000 | (30,45)→(30,15) |
| S | 30 | 0.8 | 0.00 | -0.20 | 2000 | (9,22)→(9,9) |

表 1: 走廊端点起止配置的全局参数。

## 统计指标

| case | method | $t_{p1}$ | $t_{p2}$ | valley ratio | absorption | truncated (MC) | $P_{\text{fast}}$ (MC) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | windowed | 102 | 1500 | 1.000 | 0.604 | 0.395 | 0.540 |
| S | windowed | 40 | 1000 | 1.000 | 0.664 | 0.333 | 0.543 |

表 2: 走廊端点起止配置的统计结果。$t_{p2}$ 为 late-window 最大值（非真实第二峰）。

## 数值扫描与尝试（基于配置 Z）

**扫描结论要点** Z0–Z4 仅出现单峰 + 长尾，晚窗峰值基本贴近窗口边界，属于“无第二峰”的窗口化伪峰。加入外圈 sticky 本身仍不产生双峰；只有再叠加外圈定向偏置（Z5/Z6）才形成额

| variant | 改动 | absorption | $t_{p1}$ | $t_{p2}$ | valley ratio | bimodal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z0 | base ($g_y=-0.2,\ \delta_{\text{open}}=0.6$) | 0.604 | 102 | 1500 | 1.000 | no |
| Z1 | $g_y=0$ | 0.696 | 137 | 1500 | 1.000 | no |
| Z2 | $g_y=-0.4$ | 0.573 | 81 | 1500 | 1.000 | no |
| Z3 | $\delta_{\text{open}}=0.2$ | 0.611 | 102 | 1500 | 1.000 | no |
| Z4 | 外圈 sticky ($\alpha=0.2$) | 0.603 | 102 | 1500 | 1.000 | no |
| Z5 | sticky ($\alpha=0.2$) + 外圈顺时针 bias ($\delta=0.1$) | 0.603 | 102 | 2996 | 0.300 | yes |
| Z6 | 更强 sticky ($\alpha=0.05$) + 外圈顺时针 bias ($\delta=0.1$) | 0.623 | 102 | 1990 | 0.014 | yes |

表 3: 同一几何下的参数扫描结果（$t_{\max}=3000$）。Z0–Z4 的 $t_{p2}$ 为 late-window 最大值（非真实第二峰）。

外的慢通道，从而出现明显第二峰。

# 1 模型定义与坐标约定

状态空间为 $\Omega\subseteq\{1,\dots,N_x\}\times\{1,\dots,N_y\}$（可为矩形或任意形状），目标点 $(x_t,y_t)$ 为吸收态。每一步更新为

$$p_{\text{left}}=\frac{q}{4}(1+g_x),\quad p_{\text{right}}=\frac{q}{4}(1-g_x), \tag{1}$$

$$p_{\text{down}}=\frac{q}{4}(1+g_y),\quad p_{\text{up}}=\frac{q}{4}(1-g_y), \tag{2}$$

$$p_{\text{stay}}=1-q. \tag{3}$$

本文采用 “$y$ 轴向下为正” 的坐标约定，因此 $g_y>0$ 表示向下偏置；$g_x>0$ 表示向左偏置。外边界与内部墙均为**全反射**：越界或穿墙尝试的概率质量加回 $p_{\text{stay}}$。

**局部异质性（组合规则）**

- local bias（箭头）：将 $p_{\text{stay}}$ 乘 $(1-\delta)$，并把 $\Delta=\delta p_{\text{stay}}$ 加到箭头方向；其余方向不变。
- sticky：在点 $u$ 上设 $q_u=\alpha(u)q$，使 $p_{\text{stay}}(u)=1-q_u$ 增大，再叠加 local bias。
- barrier：封死边 $u\leftrightarrow v$，将该方向概率全部加回 $p_{\text{stay}}(u)$。
- door：半透门按 $p_{\text{pass}}$ 通过，其余部分反射回 $p_{\text{stay}}(u)$。

# 2 FPT 定义与精确递推

首达时间为

$$\tau=\inf\{t\geq 1:\ X_t=(x_t,y_t)\},\qquad f(t)=\Pr(\tau=t).$$

将目标点视为吸收态，其余为 transient，令 $Q$ 为 transient 子矩阵，$r$ 为一步进入吸收态的流出向量，则

$$f(t)=r^{\top}Q^{t-1}p_0,\qquad t\geq 1,$$

等价递推为 $p_{t+1}=Qp_t$，$f(t)=r^{\top}p_t$。本文以 exact recursion 为基准，AW 反演与 MC 作为对照与通道统计。

# 3 图形阅读指南

图 1 给出统一符号语法：红色方块为起点、蓝色菱形为目标；粗实线为反射墙、虚线为 door、半透明阴影为 sticky 区；红色小箭头为 local bias；图外大箭头给出全局偏置方向与 $(g_x, g_y)$。通道示意图见图 2。




图 1: 图形符号图例。

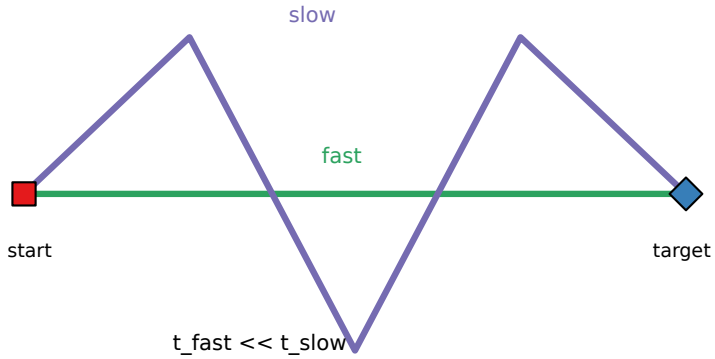



图 2: 通道示意（快通道/慢通道的混合分解）。

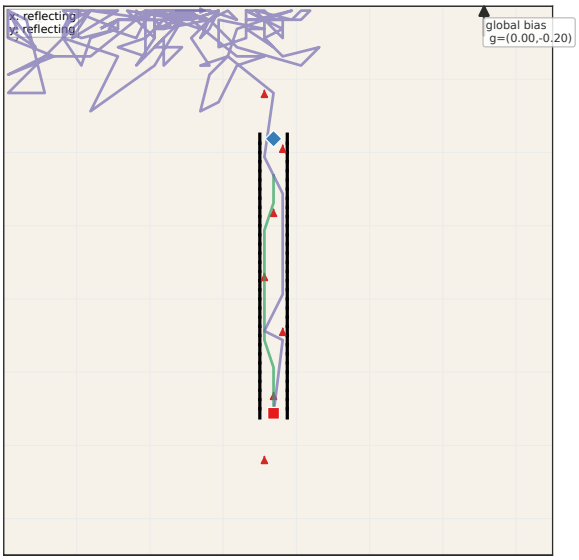
# 4 配置 Z：走廊端点起止（墙段内端点）

**几何与参数**

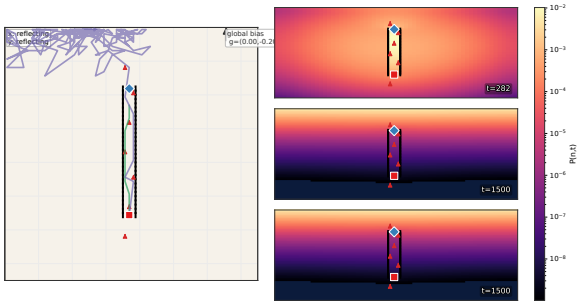
- 内墙：$x = 28 \leftrightarrow 29$ 与 $x = 31 \leftrightarrow 32$，$y = 15..45$。
- 走廊 bias：$x = 29..31$ 上向上箭头；核心段 $y = 15..45$ 取 $\delta_{\text{core}} = 0.95$，开口段 $y = 10..14, 46..50$ 取 $\delta_{\text{open}} = 0.6$。
- 起点/目标：$S = (30, 45)$，$T = (30, 15)$；$g = (0, -0.2)$，$t_{\max} = 3000$。

**结果摘要** 早峰在 $t \approx 102$，valley ratio=1；$t_{\max} = 3000$ 时吸收概率约 0.604，仍无稳定晚峰。

**为什么没有双峰（机制分析）** 该构型的起止点均位于走廊内端点，且走廊内上行箭头较强，导致主通道的漂移时间尺度占主导。穿出走廊进入外域的轨迹并没有进入一个准封闭慢通道，而是在外域宽泛扩散后再回到走廊，因而形成的是 长尾而不是一个集中在某个晚时刻的第二峰。换句话说，混合分解里 “慢通道” 的条件分布过于宽散，无法在 $f(t)$ 上形成谷底与第二峰。

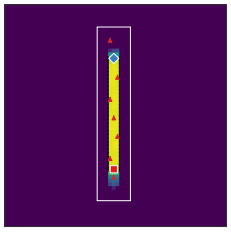



(Z1) 环境示意

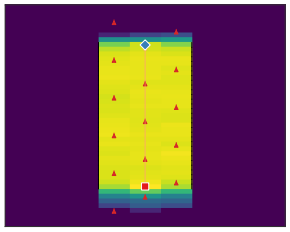


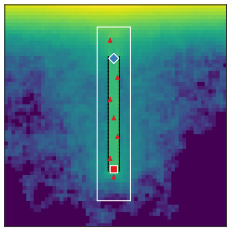

(Z2) 热图三帧

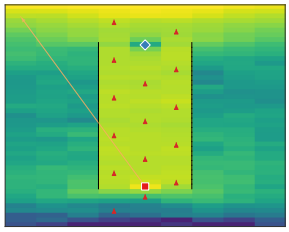
图 3: 配置 Z 的环境与 $P(n,t)$ 热图。



(Z3) 快通道路径密度

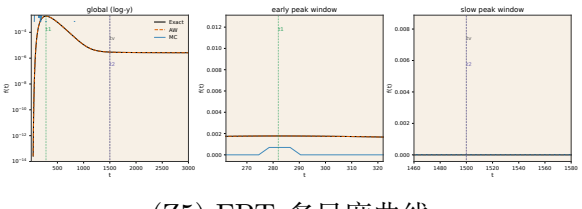




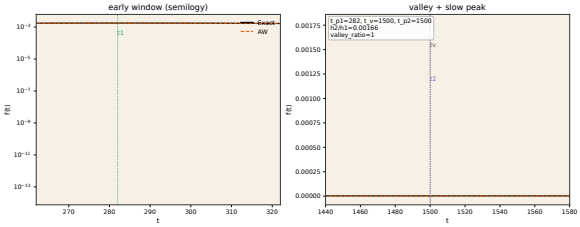


(Z4) 慢通道路径密度

图 4: 配置 Z 的快/慢路径密度。

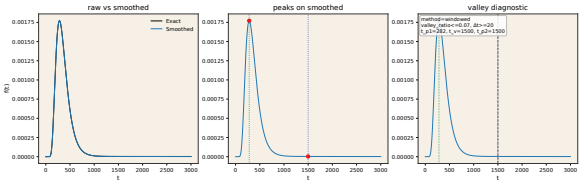



(Z5) FPT 多尺度曲线

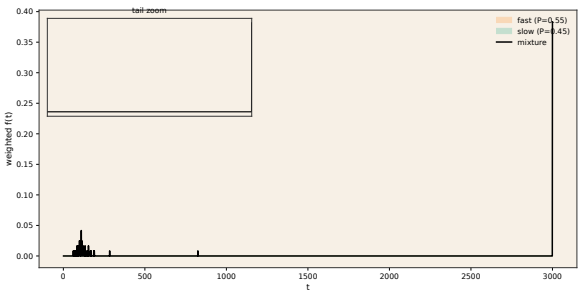



(Z6) 峰谷放大

图 5: 配置 Z 的 FPT 曲线与峰谷放大。




(Z7) 峰谷诊断




(Z8) 通道分解

图 6: 配置 Z 的峰谷诊断与通道分解。

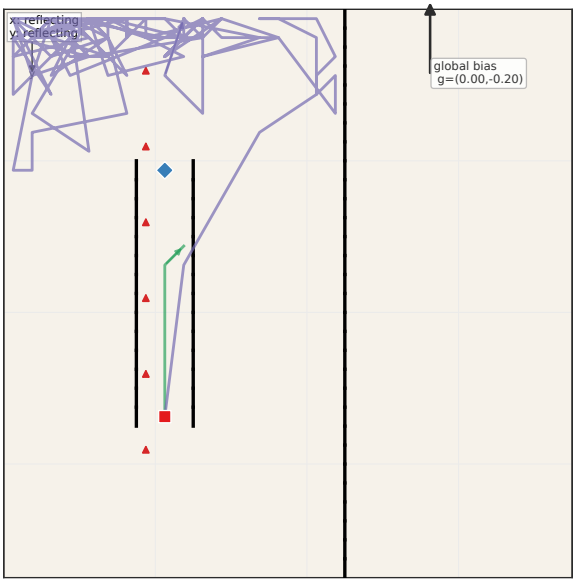
# 5 配置 S：小 $N$ 竖向矩形（墙端点起止）

**几何与参数**

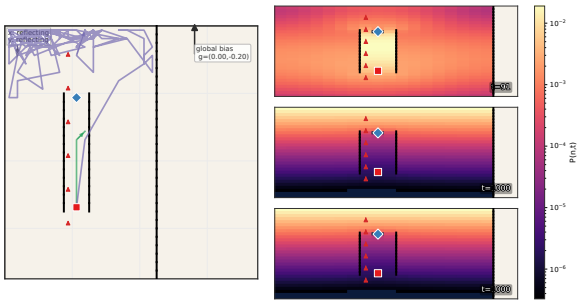
- 域：$18 \times 30$ 矩形（内部坐标 $x = 1..18$，$y = 1..30$；嵌入在 $N = 30$ 的格点上）。
- 内墙：$x = 7 \leftrightarrow 8$ 与 $x = 10 \leftrightarrow 11$，$y = 9..22$。
- 走廊 bias：$x = 8..10$ 上向上箭头；核心段 $y = 9..22$ 取 $\delta_{\text{core}} = 0.95$，开口段 $y = 4..8, 23..27$ 取 $\delta_{\text{open}} = 0.6$。
- 起点/目标：$S = (9, 22)$，$T = (9, 9)$；$g = (0, -0.2)$，$t_{\max} = 2000$。

**结果摘要** 早峰在 $t \approx 40$，valley ratio=1；$t_{\max} = 2000$ 时吸收概率约 0.664，仍无稳定晚峰。

**机制说明** 缩小到竖向矩形并未制造新的慢通道：外域仍是宽松可回的扩散区，进入外域后的条件分布过宽，无法形成一个集中迟滞峰。

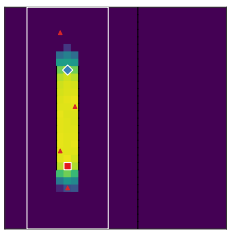



(S1) 环境示意

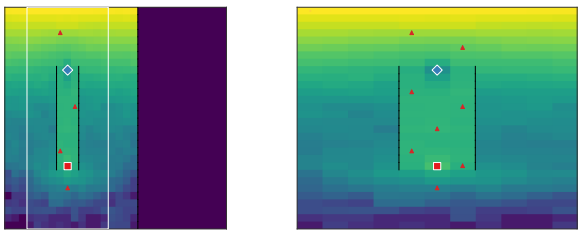


(S2) 热图三帧

图 7: 配置 S 的环境与 $P(n, t)$ 热图。



(S3) 快通道路径密度

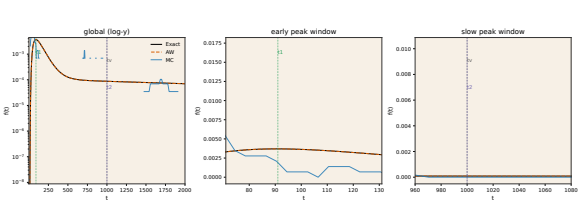


(S4) 慢通道路径密度

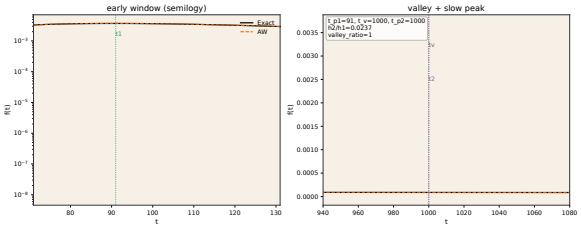
图 8: 配置 S 的快/慢路径密度。

## 数据与复现

```
cd reports/grid2d_blackboard_bimodality
```

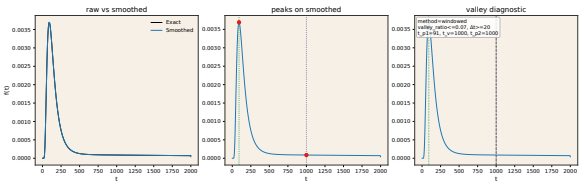



(S5) FPT 多尺度曲线

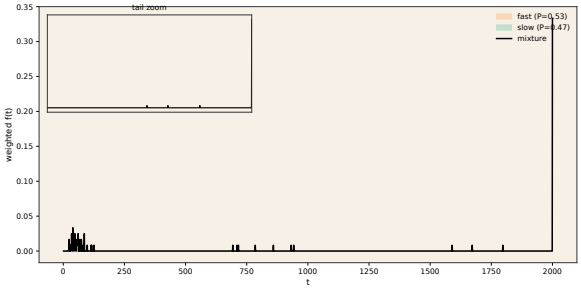



(S6) 峰谷放大

图 9: 配置 S 的 FPT 曲线与峰谷放大。




(S7) 峰谷诊断




(S8) 通道分解

图 10: 配置 S 的峰谷诊断与通道分解。

```
python3 code/blackboard_bimodality_pipeline.py --cases Z,S
python3 code/z_scan.py
latexmk -xelatex -auxdir=build -emulate-aux-dir
↪ grid2d_blackboard_bimodality_cn.tex
latexmk -pdf -auxdir=build -emulate-aux-dir
↪ grid2d_blackboard_bimodality_en.tex
```