

二维 $N \times N$ 晶格上偏置/惰性随机游走的首达时间双峰构造

结论与关键图示

- **候选 A** (周期边界 + 全局偏置): FPT 在统一双峰判据下呈现双峰; 快/慢通道由“逆漂移短路”与“顺漂移绕行”叠加产生; AW 反演与 exact recursion 在 $t \leq t_{\max}^{\text{AW}}$ 内一致, MC 叠加吻合 (图 7、9)。
- **候选 B** (贴边走廊 + 混合边界): 自动调参得到 $(g_x, g_y, \delta) = (-0.25, 0.40, 0.70)$, 并采用 x 周期边界引入绕行慢通道, 使 fast 权重进入可视化可辨区间; 峰谷放大图中双峰清晰可见 (图 15)。
- **候选 C** (door + sticky + wrap-around): 在 $n_{\text{bias}} = 0$ 时已出现双峰, 最少 local bias sites 为 0 (图 28)。
- 数值对比: AW 反演 (解析) 与 exact recursion (时域) 在前 $t_{\max}^{\text{AW}}$ 步的 L^1 误差达到 10^{-12} 量级 (见表 3 与误差指标)。

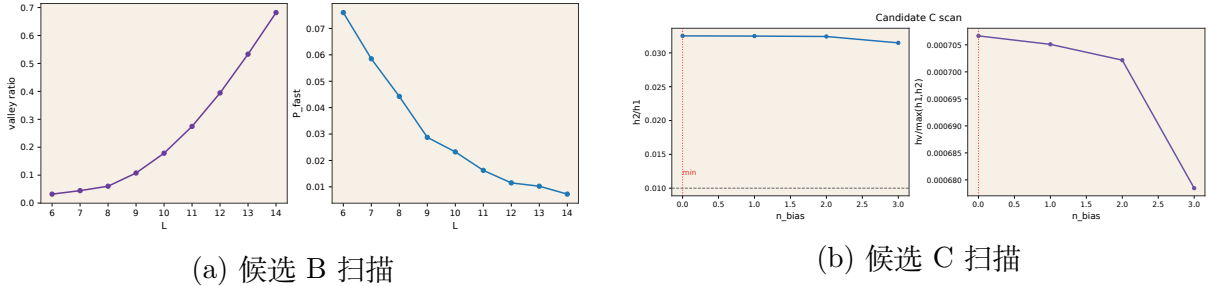


图 1: 最短走廊长度与最少 local bias sites 扫描结果 (B 与 C)。

参数表

case	N	q	g_x	g_y	boundary	(start, target)
A	60	0.8	+0.6	0	x 周期, y 反射	(10,30)→(12,30)
B	60	0.8	-0.25	+0.40	x 周期, y 反射	(50,60)→(42,60)
C	60	0.8	+0.5	0	x 周期, y 反射	(10,30)→(50,30)

表 1: 三类候选的核心参数。候选 B 采用贴边走廊与自动调参 (此表给出最终采用的 g_x, g_y); 候选 C 采用 door + sticky, 并保留 wrap-around 通道。

1 模型定义与坐标约定

状态空间为 $\{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ 。记当前位置为 (x, y) ，目标点 (x_t, y_t) 为吸收态。每步更新为

$$p_{\text{left}} = \frac{q}{4}(1 + g_x), \quad p_{\text{right}} = \frac{q}{4}(1 - g_x), \quad (1)$$

$$p_{\text{down}} = \frac{q}{4}(1 + g_y), \quad p_{\text{up}} = \frac{q}{4}(1 - g_y), \quad (2)$$

$$p_{\text{stay}} = 1 - q. \quad (3)$$

本文采用“ y 轴向下为正”的坐标约定，因此 $g_y > 0$ 表示向下偏置。边界条件支持反射、周期或混合 (x 周期、 y 反射)。由式 (1) 可见 $g_x > 0$ 会增大 $p_{\text{left}} = \frac{q}{4}(1 + g_x)$ 并减小 $p_{\text{right}} = \frac{q}{4}(1 - g_x)$ ，因此本文约定 $g_x > 0$ 表示向左全局偏置 ($g_x < 0$ 表示向右偏置)。

局部异质性 (组合)

- local bias (箭头): 将 p_{stay} 乘 $(1 - \delta)$ ，并把 $\Delta = \delta p_{\text{stay}}$ 加到箭头方向；其余方向不变。
- sticky site: 将该格点的移动概率缩放为 $q_{\text{site}} = \text{factor} \cdot q$ (本文默认 0.2)， p_{stay} 相应上升。
- barrier: 反射边将该方向概率加回 stay；半透门以 p_{pass} 通过、 $1 - p_{\text{pass}}$ 反射。

2 图形阅读指南

图 2 给出统一符号语法：红色方块为起点、蓝色菱形为目标；粗实线为反射墙、虚线为门 (标注 p_{pass})、半透明阴影为 sticky 区；红色小箭头为 local bias；图外大箭头给出全局偏置方向与 (g_x, g_y) 数值。为便于阅读，将环境示意、 $P(n, t)$ 切片、FPT 多尺度图与通道分解分别独立成图，避免子图拥挤；候选 B 另给出峰谷放大图以强调早峰与 valley。



图 2: 图形符号图例。

3 解析推导：从无缺陷 propagator 到时域 FPT

本节给出统一推导链条：无缺陷 *propagator* $\rightarrow$ 有缺陷 *propagator* $\rightarrow$ FPT 生成函数 $\rightarrow$ AW 反演。三类候选均可落在同一框架内。

3.1 矩阵形式与生成函数

设无吸收系统的转移矩阵为 A ，约定 $A_{v,u} = \Pr(u \rightarrow v)$ ，因此列和为 1，且 $\mathbf{p}_{t+1} = A\mathbf{p}_t$ 。传播子满足

$$P_{n_0}(n, t) = \mathbf{e}_n^\top A^t \mathbf{e}_{n_0}, \quad \tilde{\mathbf{P}}(z) = \sum_{t \geq 0} A^t z^t = (I - zA)^{-1}, \quad (4)$$

从而

$$\tilde{P}_{n_0}(n, z) = \mathbf{e}_n^\top (I - zA)^{-1} \mathbf{e}_{n_0}. \quad (5)$$

下面给出 A 的谱分解形式与缺陷更新公式，以便对任意候选构造得到 $\tilde{P}$ 。

3.2 无缺陷 propagator 的谱分解

将二维转移写成两个一维算子叠加（沿 x 与 y 方向）。设一维步进矩阵的特征对为 $\{\lambda_k^{(\gamma)}, h_k^{(\gamma)}\}$ ，其中 $\gamma \in \{\text{periodic}, \text{reflecting}\}$ 表示边界类型。定义

$$s_k^{(\gamma)} = q(\lambda_k^{(\gamma)} - 1), \quad \Lambda_{k_1, k_2} = 1 + \frac{s_{k_1}^{(\gamma_x)} + s_{k_2}^{(\gamma_y)}}{2}. \quad (6)$$

则二维无缺陷 propagator (PRE 102, 062124 的 Eq.(33) 形式) 为

$$P_{n_0}^{(\gamma)}(n, t) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h_{k_1}^{(\gamma_x)}(x, x_0) h_{k_2}^{(\gamma_y)}(y, y_0) \Lambda_{k_1, k_2}^t. \quad (7)$$

对时间做 z 变换得到

$$\tilde{P}_{n_0}^{(\gamma)}(n, z) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \frac{h_{k_1}^{(\gamma_x)}(x, x_0) h_{k_2}^{(\gamma_y)}(y, y_0)}{1 - z\Lambda_{k_1, k_2}}. \quad (8)$$

周期边界 (periodic)

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad \lambda_k^{(\text{per})} = \frac{1+g}{2}e^{-i\theta_k} + \frac{1-g}{2}e^{i\theta_k}, \quad h_k^{(\text{per})}(x, x_0) = \frac{1}{N}e^{i\theta_k(x-x_0)}. \quad (9)$$

反射边界 (reflecting) 设 $p_\ell = (1+g)/2$, $p_r = (1-g)/2$, $\rho = p_r/p_\ell$ 。可通过相似变换将一维算子对称化，得到

$$\lambda_0^{(\text{ref})} = 1, \quad \lambda_k^{(\text{ref})} = 2\sqrt{p_\ell p_r} \cos \frac{k\pi}{N} \quad (k \geq 1), \quad h_k^{(\text{ref})}(x, x_0) = u_k(x)u_k(x_0)\sqrt{\frac{\pi_x}{\pi_{x_0}}}, \quad (10)$$

其中 $\pi_x \propto \rho^x$ 为平衡分布， u_k 为正交余弦模（与 PRE Eq.(22)-(23) 一致）。

3.3 有缺陷 propagator 的 determinant 公式

将缺陷写为矩阵扰动 $\underline{X} = \underline{B} - \underline{A}$ 。对每条有向边 ($u_i \rightarrow v_i$) 定义

$$\eta_{u_i, v_i} = X_{v_i, u_i} = B_{v_i, u_i} - A_{v_i, u_i}. \quad (11)$$

并定义差分 propagator

$$\tilde{P}_{\langle u-v \rangle}^e(n, z) = \tilde{P}_u^e(n, z) - \tilde{P}_v^e(n, z). \quad (12)$$

则 2311.00464v2 的 inert-heterogeneity 公式给出

$$\tilde{P}_{n_0}(n, z) = \tilde{P}_{n_0}^e(n, z) - 1 + \frac{\det[H(n, n_0; z)]}{\det[H(z)]}, \quad (13)$$

其中

$$H_{ij}(z) = -\frac{\delta_{ij}}{z} + \eta_{u_j, v_j} \tilde{P}_{\langle u_j-v_j \rangle}^e(u_i, z) - \eta_{v_j, u_j} \tilde{P}_{\langle u_j-v_j \rangle}^e(v_i, z), \quad (14)$$

$$H(n, n_0; z)_{ij} = H_{ij}(z) - \tilde{P}_{\langle u_j-v_j \rangle}^e(n, z) \left[\eta_{u_i, v_i} \tilde{P}_{n_0}^e(u_i, z) - \eta_{v_i, u_i} \tilde{P}_{n_0}^e(v_i, z) \right]. \quad (15)$$

数值实现中，我们等价地求解线性系统得到 $\tilde{P}$ （由 Cramer 规则与上式等价），以获得更好的数值稳定性。亦可将其写成线性代数形式：

$$b_j(n, z) = \tilde{P}_{u_j}^e(n, z) - \tilde{P}_{v_j}^e(n, z), \quad (16)$$

$$a_i(n_0, z) = \eta_{u_i, v_i} \tilde{P}_{n_0}^e(u_i, z) - \eta_{v_i, u_i} \tilde{P}_{n_0}^e(v_i, z), \quad (17)$$

$$H_{ij}(z) = -\frac{\delta_{ij}}{z} + \eta_{u_j, v_j} b_j(u_i, z) - \eta_{v_j, u_j} b_j(v_i, z), \quad (18)$$

从而

$$\tilde{P}_{n_0}(n, z) = \tilde{P}_{n_0}^e(n, z) - \mathbf{b}(n, z)^\top H(z)^{-1} \mathbf{a}(n_0, z). \quad (19)$$

本文数值实现使用该线性系统形式避免逐点求行列式。

缺陷映射 (B/C 使用)

- local bias: 减少 self-loop 并把概率加到箭头方向，等价于 $(u \rightarrow v)$ 的 $\eta_{u,v} = +\Delta$ ，并对 $(u \rightarrow u)$ 添加补偿项以保持列和为 1。
- door/permeable barrier: 跨门通过概率乘 p_{pass} ，对应边 $(u \rightarrow v)$ 与 $(v \rightarrow u)$ 具有 $\eta_{u,v} = (p_{\text{pass}} - 1)P_{u \rightarrow v}^{\text{base}}$ 。
- sticky: 所有出边概率乘 α ，每条出边 $(u \rightarrow n)$ 的 $\eta_{u,n} = (\alpha - 1)P_{u \rightarrow n}^{\text{base}}$ ，并对 $(u \rightarrow u)$ 添加补偿项以保持列和为 1。

feature	规则 (以 $u \rightarrow v$ 为例)	对应 $\lambda_{u,v}$
local bias	$p_{u \rightarrow v} = p_{u \rightarrow v}^0 + \Delta$	$-\Delta/p_{u \rightarrow v}^0$
sticky	$p_{u \rightarrow v} = \alpha p_{u \rightarrow v}^0$	$1 - \alpha$
barrier	$p_{u \rightarrow v} = 0$	1
door	$p_{u \rightarrow v} = p_{\text{pass}} p_{u \rightarrow v}^0$	$1 - p_{\text{pass}}$

表 2: 特征到 λ 的映射 ($\eta_{u,v} = -\lambda_{u,v} p_{u \rightarrow v}^0$)。

3.4 FPT 生成函数与 AW 反演

考虑包含吸收态的主方程

$$\mathbf{p}_{t+1} = P \mathbf{p}_t, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_{n_0}, \quad (20)$$

对时间做 z 变换 $\tilde{\mathbf{p}}(z) = \sum_{t \geq 0} \mathbf{p}_t z^t$ 得

$$\tilde{\mathbf{p}}(z) = (I - zP)^{-1} \mathbf{p}_0. \quad (21)$$

记累积到达概率 $F(t) = \mathbf{e}_{n_t}^\top \mathbf{p}_t$ ，则

$$\tilde{F}(z) = \mathbf{e}_{n_t}^\top (I - zP)^{-1} \mathbf{p}_0. \quad (22)$$

由 $f(t) = F(t) - F(t-1)$ (取 $F(-1) = 0$) 得到 PMF 的生成函数

$$\tilde{f}(z) = (1 - z) \tilde{F}(z) = (1 - z) \mathbf{e}_{n_t}^\top (I - zP)^{-1} \mathbf{p}_0. \quad (23)$$

本文保留两者记号: $\tilde{F}$ 为 CDF 的生成函数, $\tilde{f}$ 为 PMF 的生成函数 (AW 反演使用 $\tilde{f}$)。Exact recursion 的时域表达为

$$f(t) = r^\top Q^{t-1} p_0, \quad t \geq 1, \quad (24)$$

因此生成函数可写为

$$\tilde{f}(z) = \sum_{t \geq 1} f(t) z^t = z r^\top (I - zQ)^{-1} p_0. \quad (25)$$

另一方面, 由 renewal 关系亦有

$$\tilde{f}_{n_0 \rightarrow n_t}(z) = \frac{\tilde{P}_{n_0}(n_t, z)}{\tilde{P}_{n_t}(n_t, z)}, \quad (26)$$

两者等价: 前者以 transient 子矩阵 Q 表达, 后者以无吸收 propagator 表达。随后采用 Abate–Whitt (AW) 数值反演将 z 域系数化:

$$f(t) \approx r^{-t} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{f}(z_k) e^{-2\pi i k t / m}, \quad z_k = r e^{2\pi i k / m}, \quad t = 1, \dots, t_{\max}^{\text{AW}}. \quad (27)$$

本文选取 $m = \text{pow2}(\text{oversample} \cdot (t_{\max}^{\text{AW}} + 1))$, 并设 $r^m = 10^{-r-\text{pow}10}$, 与仓库内 AW 设置保持一致。其中 r 越接近 1, 截断误差越小但数值更敏感; r 过小则会放大截断误差, 本文沿用自动选参策略以平衡稳定性与精度。

实现流程 (Algorithm box)

1. 构建无缺陷 A 的谱分解 (周期/反射边界), 得到 $\tilde{P}^e(n, z)$ 的显式模态和。
2. 由缺陷列表构造 $H(z)$ 与向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 解线性系统得到 $\tilde{P}(n, z)$ 。
3. 用 renewal 公式 $\tilde{f}(z) = \tilde{P}_{n_0}(n_t, z) / \tilde{P}_{n_t}(n_t, z)$ 得到生成函数。
4. 对 $z_k = r e^{2\pi i k / m}$ 采样并用 AW 反演得到 $f(t)$ 。
5. 与 exact recursion/MC 对比误差, 并记录为指标 JSON。

4 数值基线: Exact/flux 递推与 MC

Exact 递推在 transient 空间计算 $f(t) = r^\top Q^{t-1} p_0$ (式 24), 作为确定性基准, 并与 AW 反演及 MC 直方图叠加对比 (图 7-24)。MC 轨迹同时按“快/慢通道”分类, 以解释双峰来源。

峰谷指标定义 对平滑后的 $f(t)$, 取两个局部主峰位置 t_{p1}, t_{p2} 及其间最小值 t_v , 并定义

$$h_1 = f(t_{p1}), \quad h_2 = f(t_{p2}), \quad \text{peak ratio} = \frac{\min(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)}, \quad \text{valley ratio} = \frac{f(t_v)}{\min(h_1, h_2)}. \quad (28)$$

注: 候选扫描图 (Fig. 1(b)) 中为便于筛选使用

$$v_{\max} = \frac{h_v}{\max(h_1, h_2)},$$

而本文的 *valley ratio* 定义为

$$v_{\min} = \frac{h_v}{\min(h_1, h_2)}.$$

二者关系为

$$v_{\max} = v_{\min} \frac{\min(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)} = v_{\min} \times \text{peak ratio}.$$

所有图内标注与配置卡数值均由同一套指标计算函数输出并写入 metrics JSON, 保证一致性。

case	L^1 error	L^∞ error
A	1.56×10^{-13}	2.97×10^{-16}
B	5.04×10^{-13}	9.57×10^{-16}
C	1.10×10^{-13}	1.89×10^{-16}

表 3: AW 反演与 exact recursion 在 $t \leq t_{\max}^{\text{AW}}$ 内的误差 (L^1 与 L^∞)。

5 三类构造与机制

下文分别给出三类候选配置的构造、机制解释与数值验证结果（将环境示意、FPT 多尺度与通道分解等分开成图，避免子图拥挤）。

5.1 候选 A：周期边界 + 全局偏置

机制对应 PhysRevE 102, 062124 中 “periodic + bias” 的双峰讨论。快通道为逆漂移短路，慢通道为顺漂移绕行。

Configuration Card

- $N = 60$, $q = 0.8$, $g = (+0.6, 0)$, 边界: x 周期、 y 反射; start=(10,30), target=(12,30)。
- 局部结构: 无 local defects; 双峰由 wrap-around 通道纯拓扑产生。
- 通道判据: 无 x -wrap 为 fast, 至少一次 x -wrap 为 slow (与 MC 分类一致)。
- 峰谷指标: $t_{p1} = 6$, $t_v = 110$, $t_{p2} = 232$; $h_2/h_1 = 0.374$; valley ratio = 2.60×10^{-5} 。

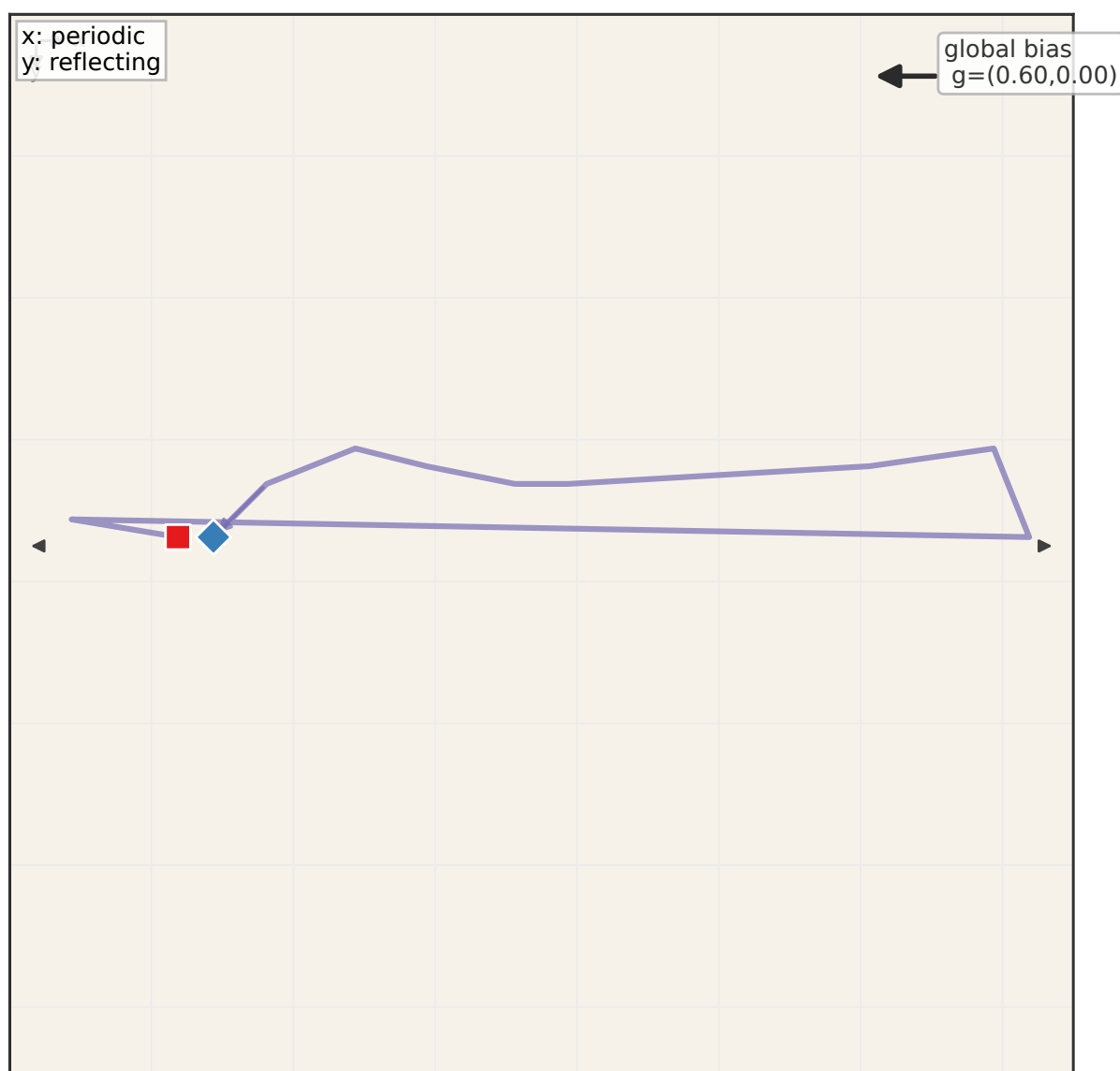


图 3: 候选 A: 环境示意图。符号语法与图 2 一致。

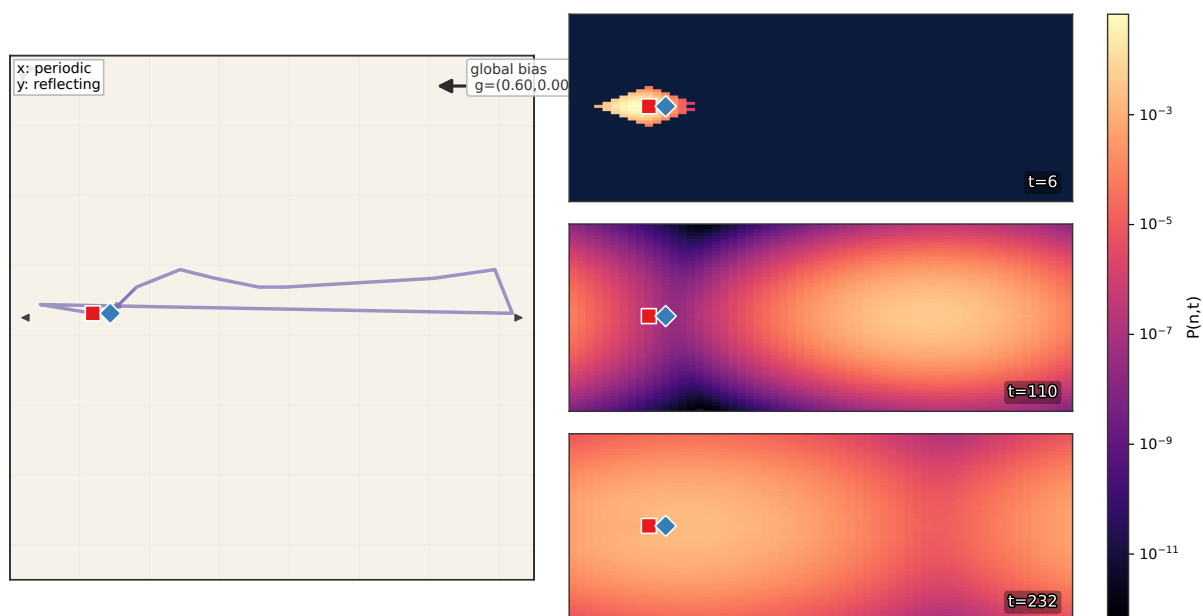


图 4: 候选 A: 环境示意与 t_{p1}, t_v, t_{p2} 的 $P(n,t)$ 切片。

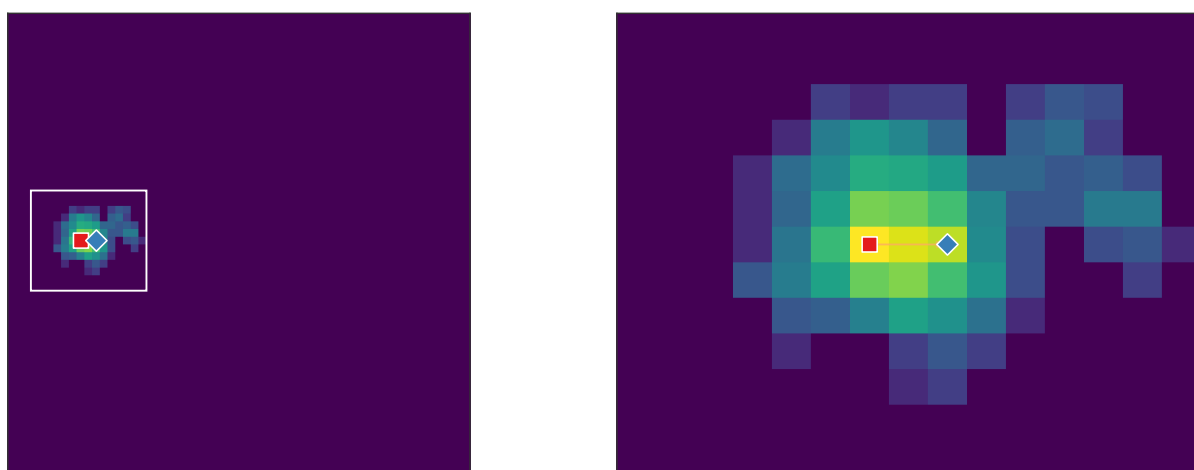


图 5: 候选 A: fast 通道轨迹密度 + 代表轨迹 (full + ROI)。

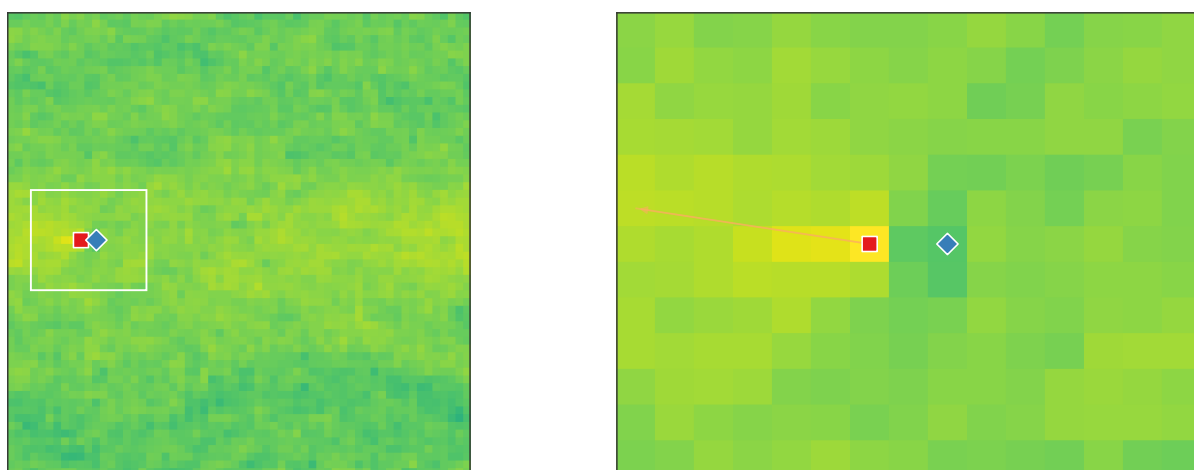


图 6: 候选 A: slow 通道轨迹密度 + 代表轨迹 (full + ROI)。

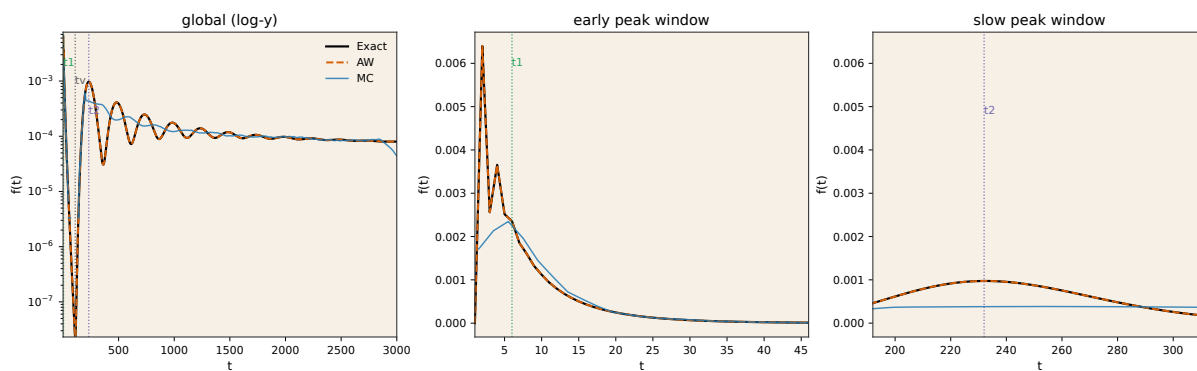


图 7: 候选 A: FPT 多尺度图 (全局 log + fast/slow 局部, Exact/AW/MC 叠加)。

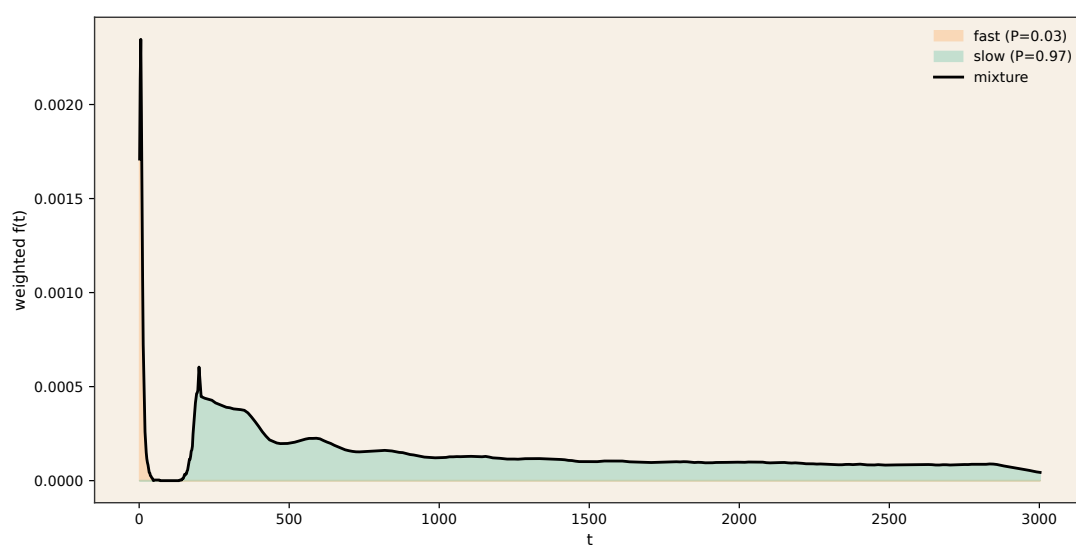


图 8: 候选 A: 通道分解与混合。

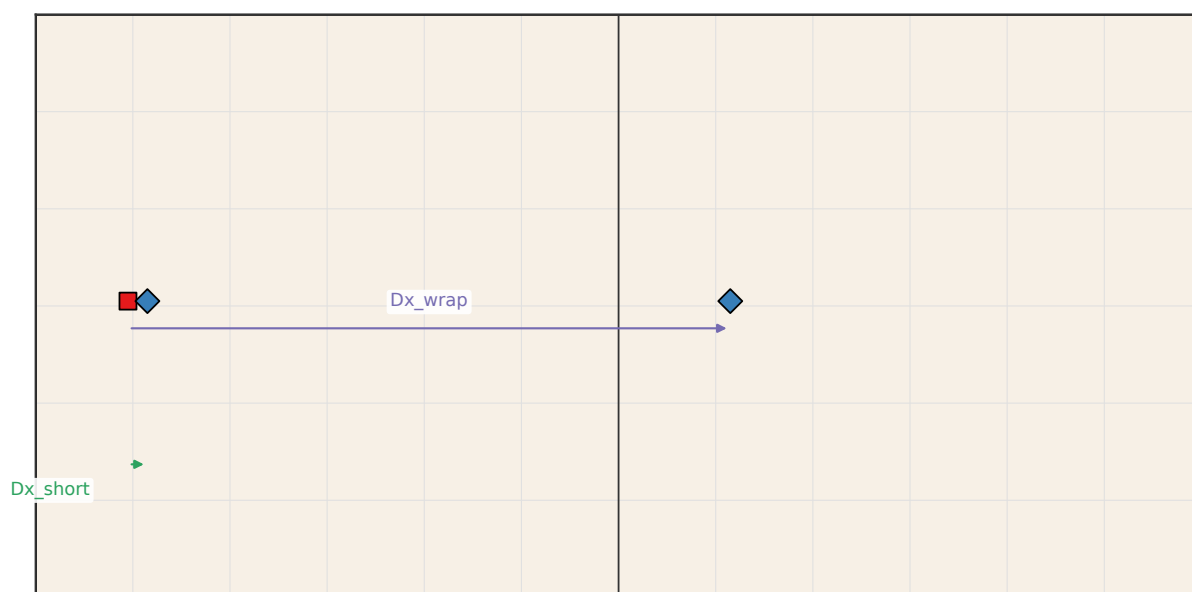


图 9: 候选 A: periodic 展开图 (两 tile), 标注 Dx_{short} 与 Dx_{wrap} 。

5.2 候选 B：贴边走廊 + mixed 边界

本文将走廊贴在反射边界 ($y = N$)，并启用自动调参选择 (g_x, g_y, δ) 以满足双峰可视化阈值；当纯反射边界下无法满足阈值时，调参器允许 x 方向采用周期边界以形成“绕行慢通道”。相比内部走廊构造，贴边走廊减少向外逃逸，从而显著提升 fast 权重。

失败对照（内部走廊） 纯反射的内部走廊在我们的判据下给出过小的 fast 权重（早峰接近肩部噪声），因此作为失败对照保留，用以说明“贴边走廊 + 混合边界”对双峰可视化的重要性。

为何内部走廊早峰极小？为何贴边走廊能修复？ 内部走廊构造可视为一个“失败案例”：走廊处于内部带，沿 y 方向的逃逸概率约为 $p_{\uparrow} + p_{\downarrow} \approx q/2$ ，因此“连续 L 步留在 band”的概率近似为 $(1 - q/2)^L$ 。取 $q = 0.8, L = 9$ 得 $(0.6)^9 \approx 1\%$ ，与该构造的 $P_{\text{fast}} \approx 0.01$ 一致，导致早峰几乎不可见。贴边走廊方案将走廊贴在反射边界，向外逃逸被反射，仅剩单侧逃逸 $p_{\uparrow} \approx q(1 - g_y)/4$ ，留在 band 的概率提升为 $(1 - p_{\uparrow})^L$ ，可达 $10\% \sim 30\%$ ，因此早峰从几乎不可见提升为满足可视化阈值；同时 x 周期边界为慢通道提供清晰的绕行时间尺度。

Configuration Card

- $N = 60, q = 0.8, g = (-0.25, +0.40)$, 边界: x 周期、 y 反射; start=(50,60), target=(42,60)。
- 走廊: $y = 60, x \in [43, 50]$, 方向 left, $\delta = 0.70$, 长度 $L = 8$; corridor band 为 $y \in \{59, 60\}$ 。
- 通道判据: 命中前若未离开 corridor band 则 fast, 否则 slow (与 MC 分类一致)。
- 峰谷指标: $t_{p1} = 33, t_v = 220, t_{p2} = 473$; $h_2/h_1 = 0.989$; valley ratio = 6.04×10^{-2} 。

可视化提示 候选 B 的双峰高度差异仍较大，需使用 semilogy + 局部窗口才能清晰看到早峰与 valley (见图 15)。

双峰判别与显著性 图 16 对平滑曲线执行峰检测 (prominence+distance)，标出 t_{p1}, t_{p2} 与 t_v ，并展示 valley ratio 的数值；用于排除噪声肩峰并给出统一的双峰判据。

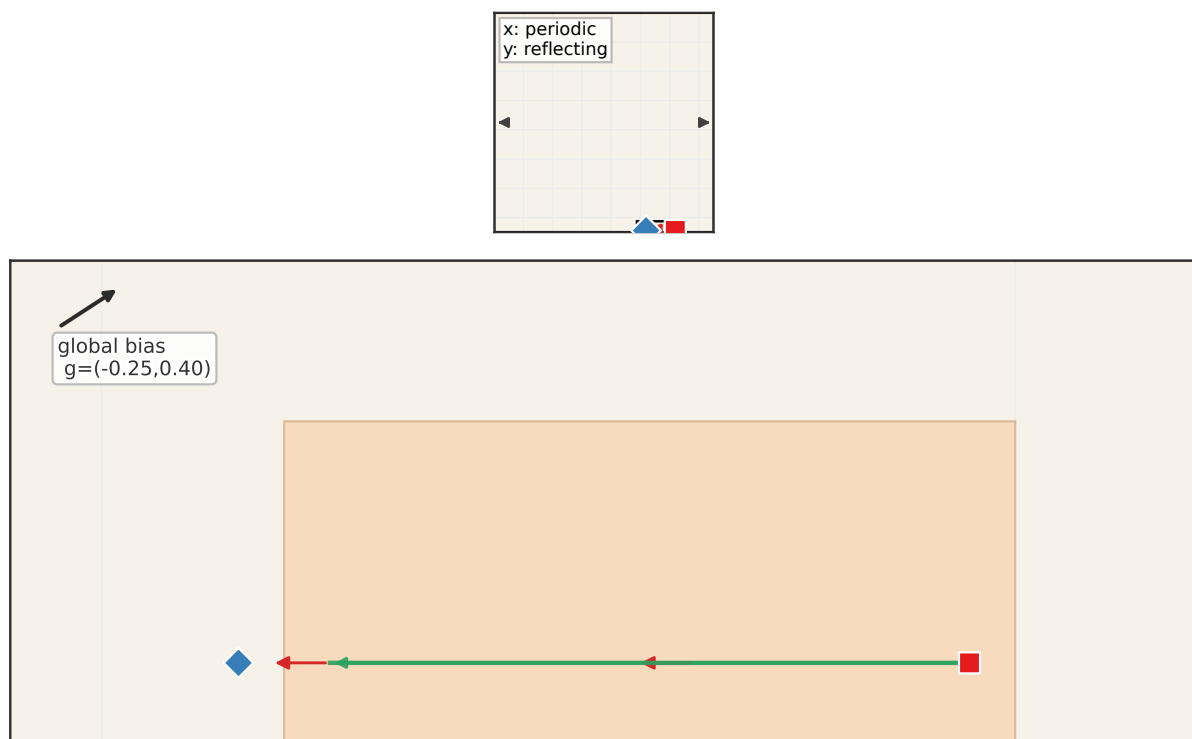
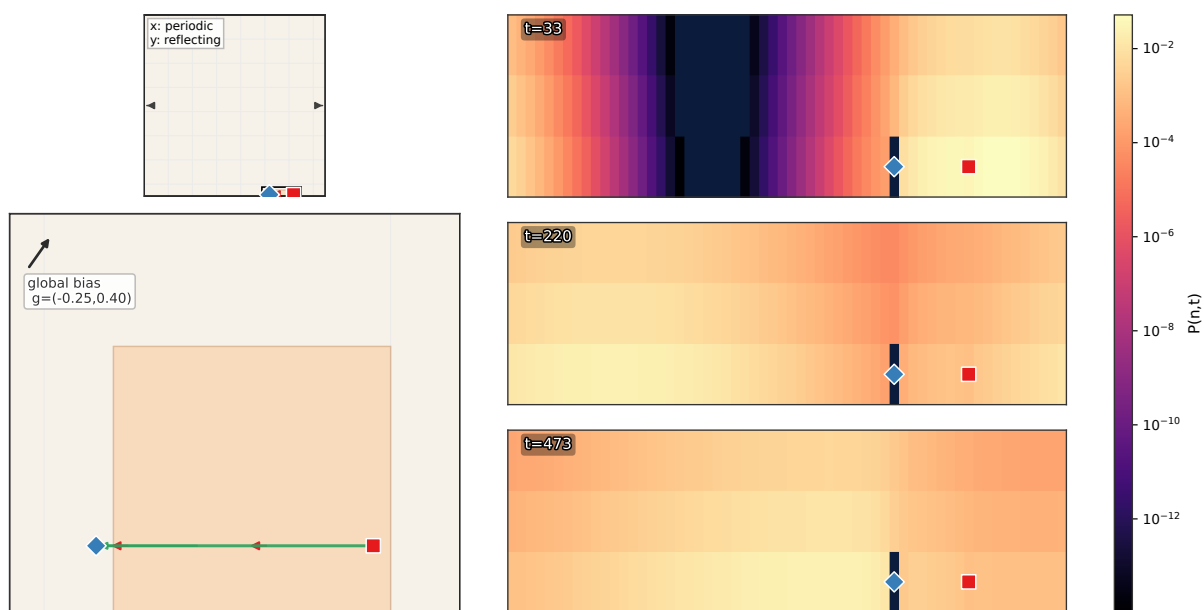


图 10: 候选 B: 环境示意图 (贴边走廊与局部 bias 清晰标注)。

图 11: 候选 B: 环境示意与 t_{p1}, t_v, t_{p2} 的 $P(n, t)$ 切片。

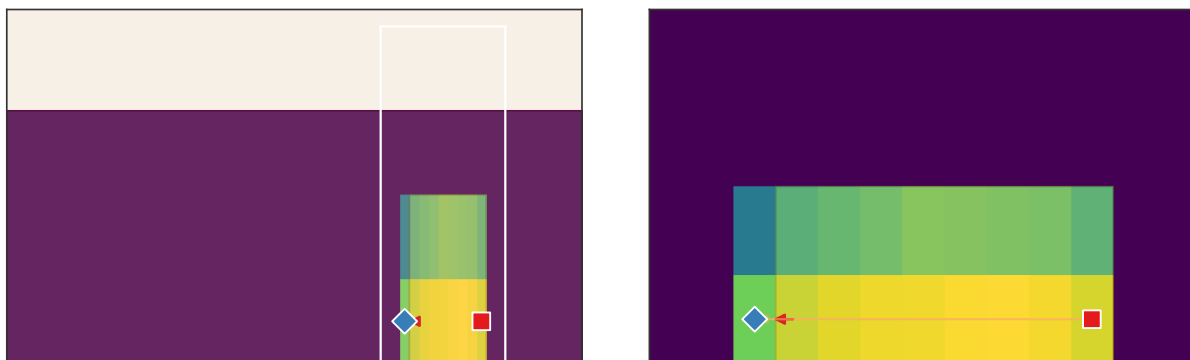


图 12: 候选 B: fast 通道密度 (贴边走廊内直达, 允许 y 方向小幅波动)。

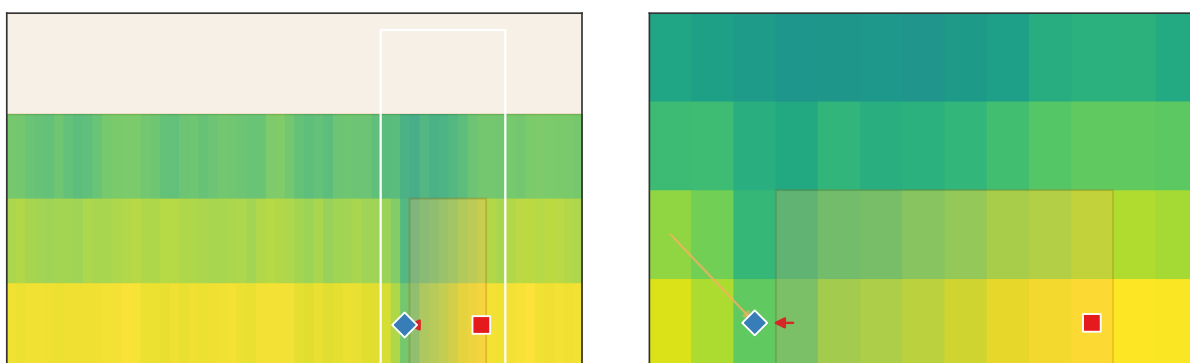


图 13: 候选 B: slow 通道密度 (离开 corridor band 后绕行)。

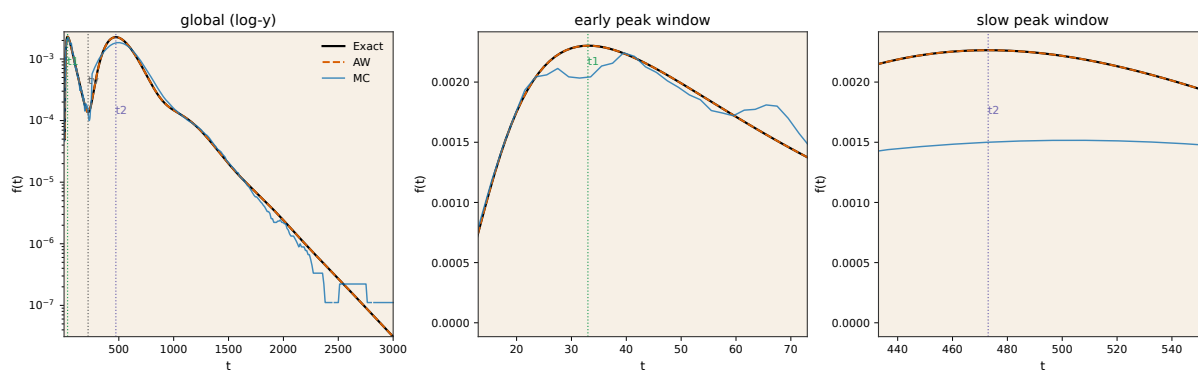


图 14: 候选 B: FPT 多尺度图 (Exact/AW/MC)。

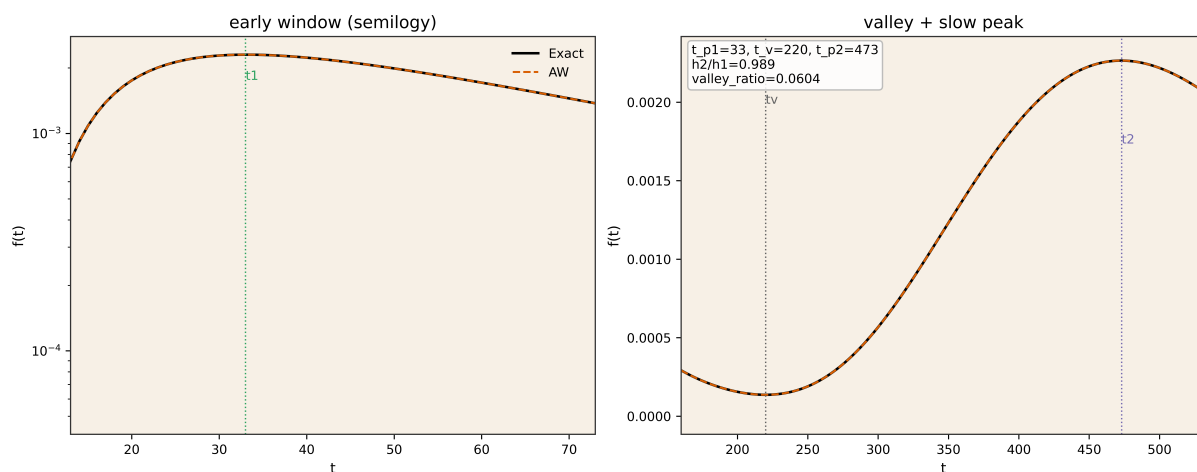


图 15: 候选 B: 峰谷放大图 (semilogy + linear, 标注 t_{p1}, t_v, t_{p2} 与 valley ratio)。

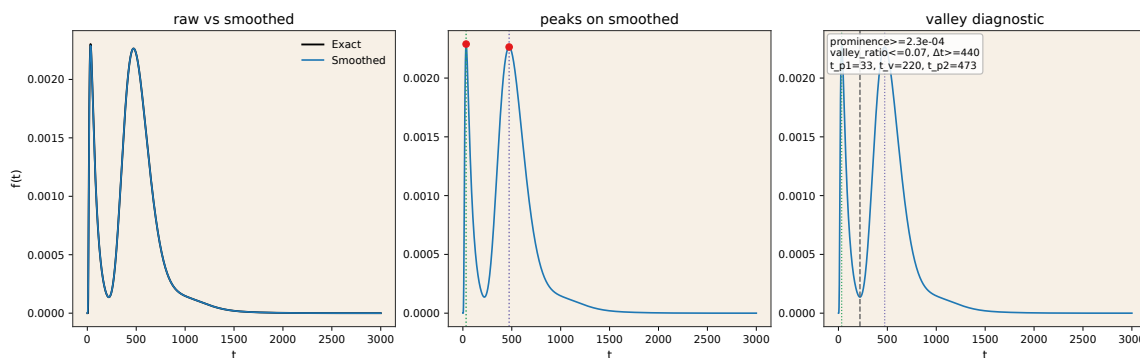


图 16: 候选 B: 双峰判别诊断图 (raw vs smoothed + peak finding + valley 指标)。

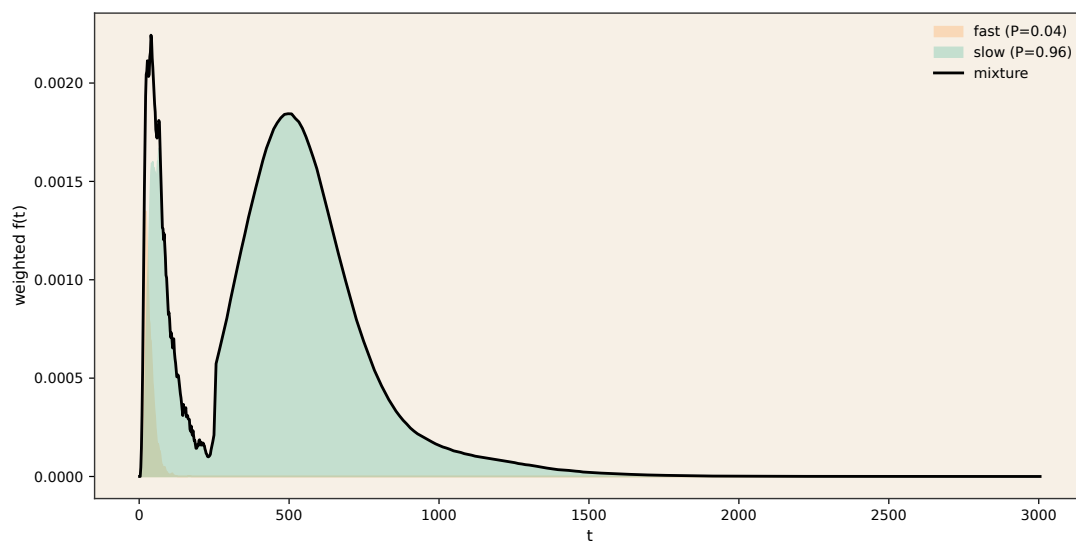


图 17: 候选 B: 通道分解与混合。

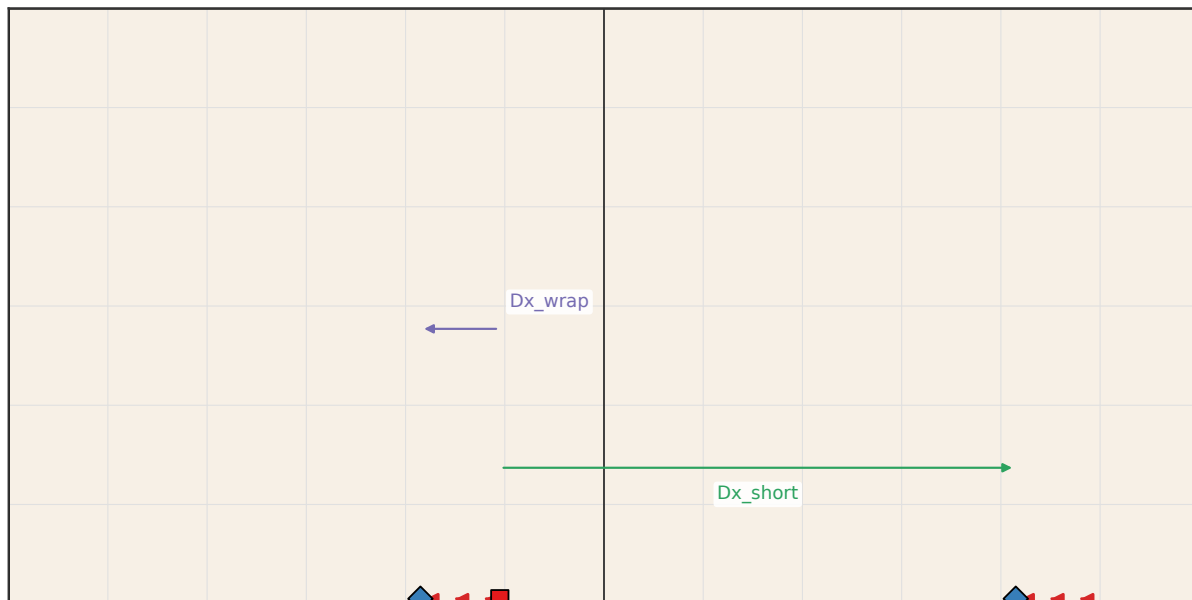


图 18: 候选 B: periodic 展开图 (两 tile), 显示绕行慢通道的几何距离。

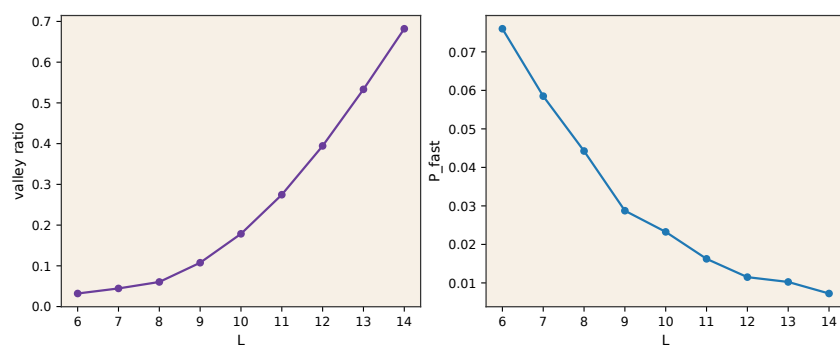


图 19: 候选 B: 扫描 L 的峰高比与 valley 深度, $L_{\min} = 6$ 。

失败案例（内部走廊） 在内部走廊参数下，候选 B 的早峰权重过小 ($P_{\text{fast}} \approx 1\%$)，平滑后主峰与次峰不再满足本文的双峰判据，属于“局部走廊过弱”的失败构造。该失败案例用于强调：corridor 贴近反射边界、并提高留在 band 的概率，是使双峰在视觉与统计判据上均达标的关键。

5.3 候选 C: door + sticky + wrap-around 通道

在竖直 barrier 上设置半透门 ($p_{\text{pass}} = 0.2$)，并在门左侧设置 3×3 sticky 区 (factor=0.2)。采用 x 周期边界与左向全局偏置 ($g_x = +0.5$)，以首次穿门时间划分通道：早穿门为 fast，晚穿门（含 wrap-around 与 sticky/door 延迟）为 slow；双峰在 $n_{\text{bias}} = 0$ 时已出现。

Configuration Card

- $N = 60$, $q = 0.8$, $g = (+0.5, 0)$ ，边界： x 周期、 y 反射；start=(10,30)，target=(50,30)。
- barrier/door：竖直壁 $x = 30$ 全长反射，仅在 $(30, 30) \leftrightarrow (31, 30)$ 开门， $p_{\text{pass}} = 0.2$ 。
- sticky： $x \in [27, 29]$, $y \in [29, 31]$ ，factor=0.2；local bias sites 数量为 0。
- 通道判据：首次穿门时间 $\leq t_v$ 为 fast，否则 slow。
- 峰谷指标： $t_{p1} = 88$, $t_v = 279$, $t_{p2} = 500$ ； $h_2/h_1 = 0.0326$ ；valley ratio= 2.19×10^{-2} 。

双峰判别诊断 图 25 采用窗口化两峰判别 (early:[1,200], late:[200,1200])，在平滑曲线上给出 $t_{p1} = 88, t_v = 279, t_{p2} = 500$ ，并满足统一判据 valley ratio ≤ 0.07 。

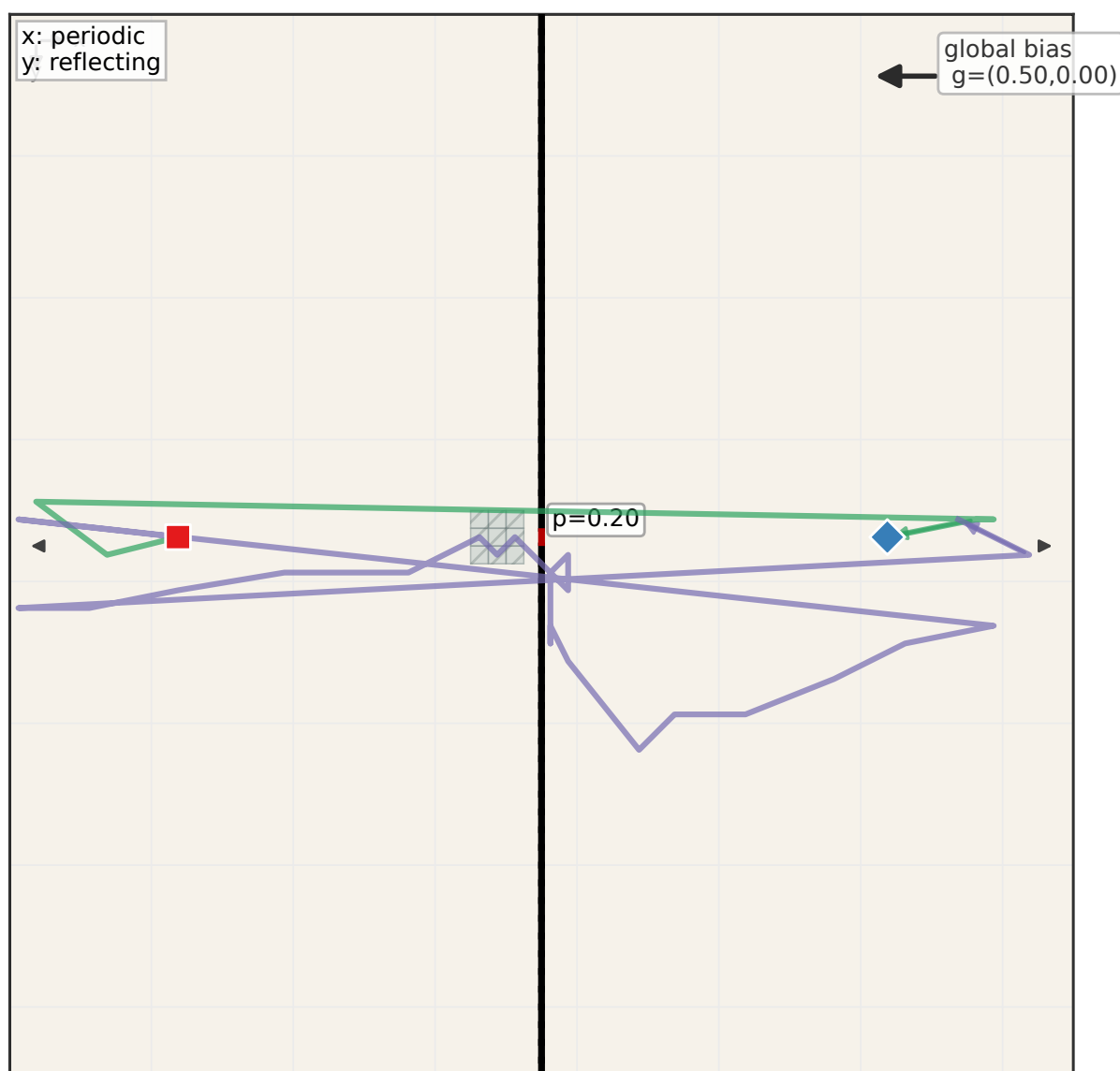


图 20: 候选 C: 环境示意图 (door/sticky 清晰标注)。

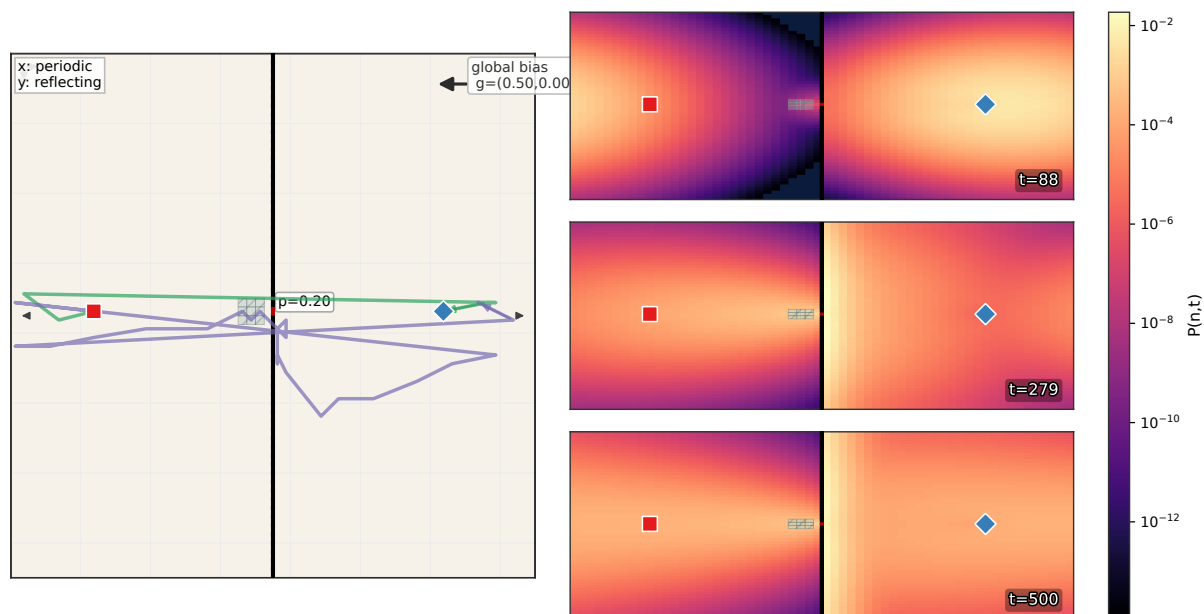
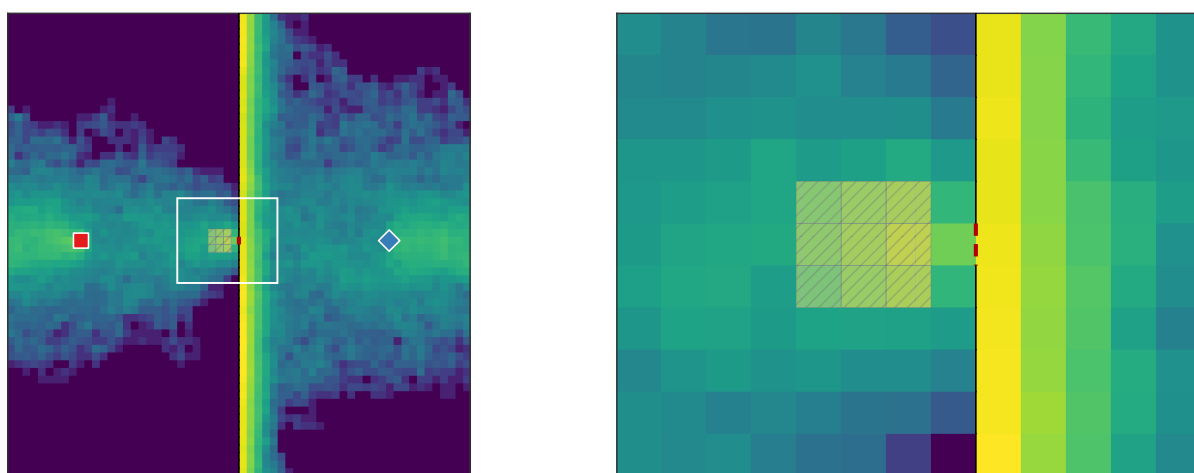
图 21: 候选 C: 环境示意与 t_{p1}, t_v, t_{p2} 的 $P(n, t)$ 切片。

图 22: 候选 C: fast 通道密度 (door 早通过)。

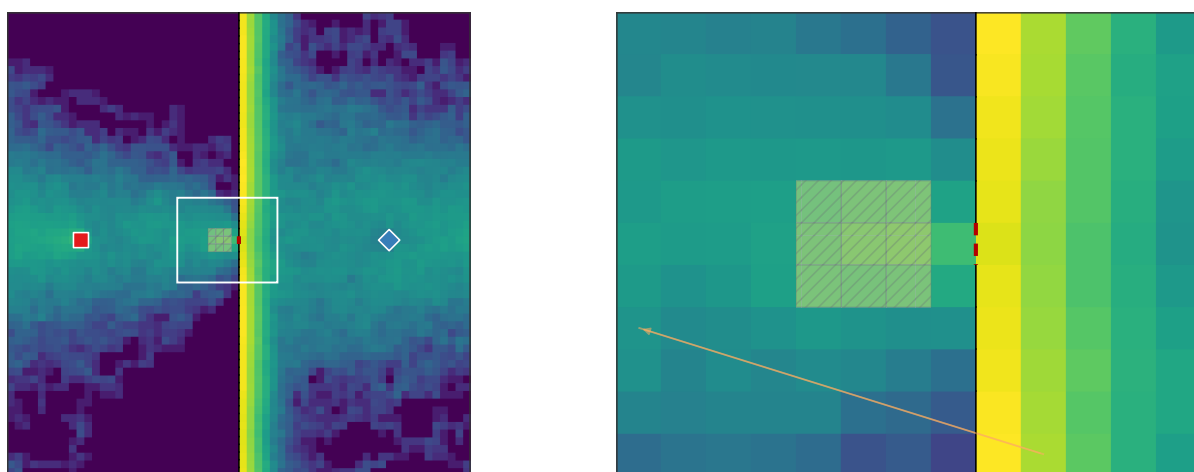


图 23: 候选 C: slow 通道密度 (wrap-around 绕行或 sticky/door 延迟)。

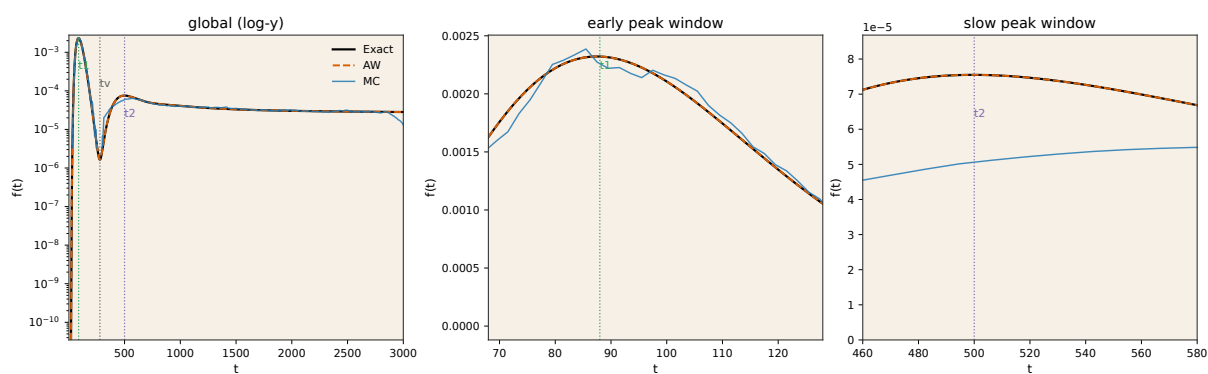


图 24: 候选 C: FPT 多尺度图 (Exact/AW/MC, slow window 自适应 y 轴)。

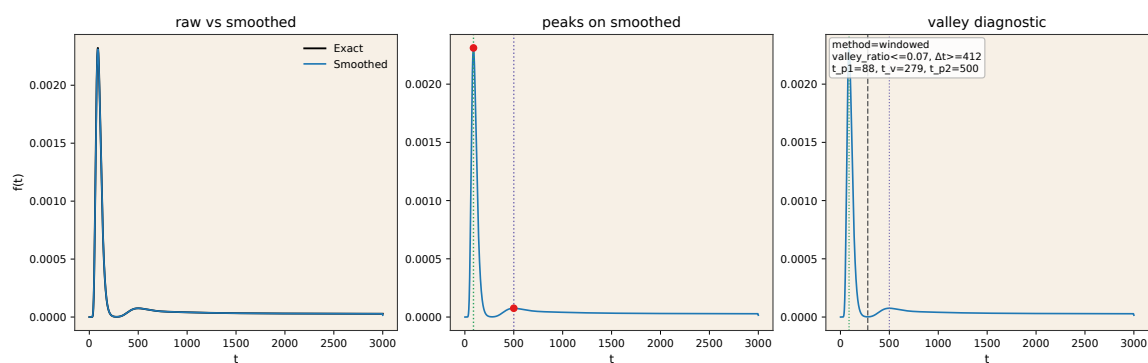


图 25: 候选 C: 双峰判别诊断图 (windowed two-peak; raw vs smoothed + peak finding + valley 指标)。

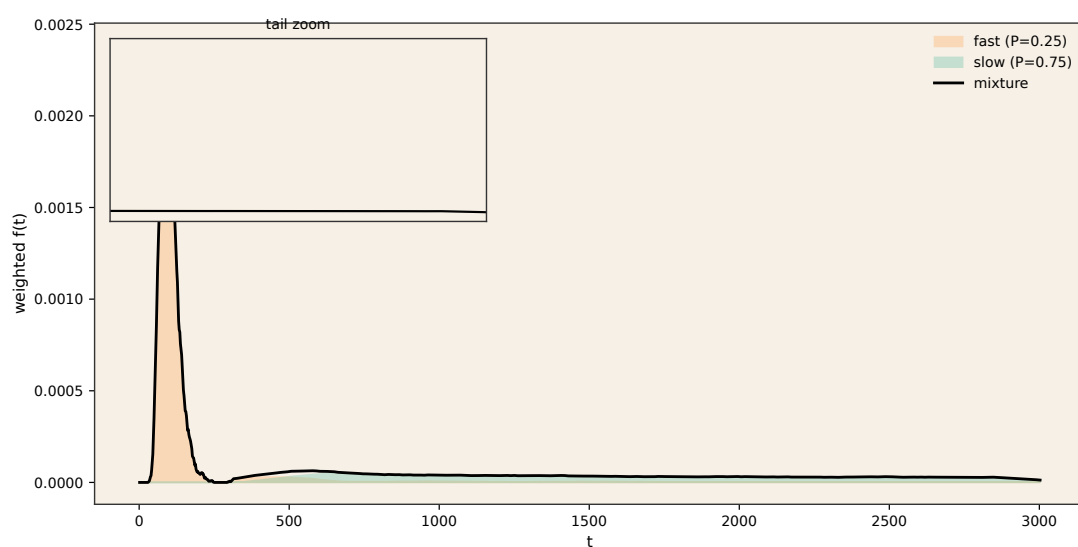


图 26: 候选 C: 通道分解与混合。

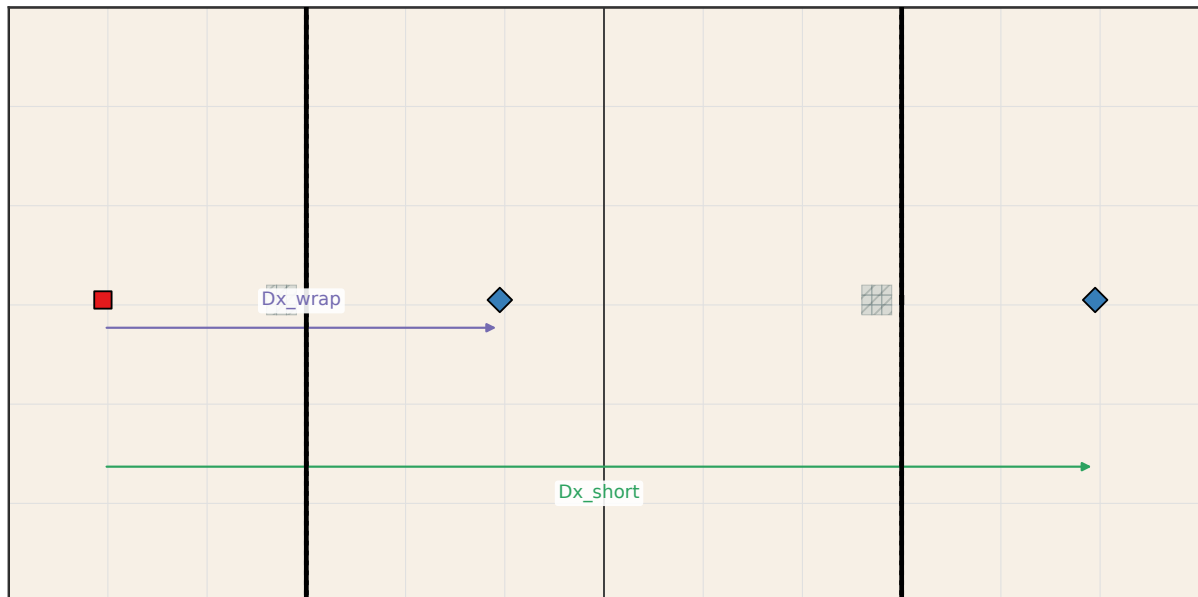
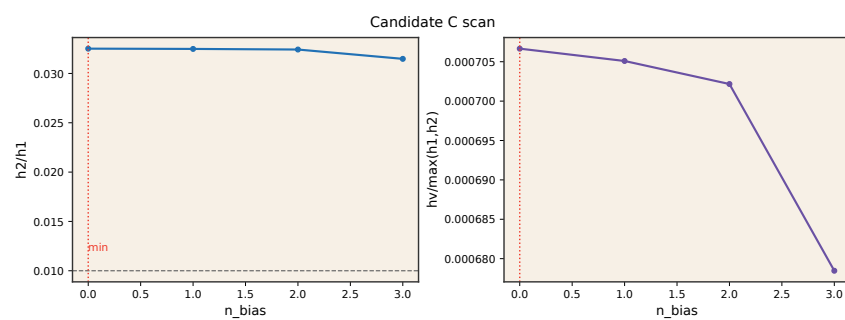


图 27: 候选 C: periodic 展开图 (两 tile)。

图 28: 候选 C: 扫描 local bias sites 数量, $n_{\min} = 0$ 。

6 直观机制图解：两通道混合 + 时间尺度分离

将轨迹按通道事件 $C \in \{\text{fast}, \text{slow}\}$ 分类，则

$$f(t) = \mathbb{P}(C = \text{fast}) f(t | C = \text{fast}) + \mathbb{P}(C = \text{slow}) f(t | C = \text{slow}). \quad (29)$$

当两类条件分布的典型时间满足 $t_{\text{fast}} \ll t_{\text{slow}}$ ，且 $\mathbb{P}(C = \text{fast})$ 不过小，则整体 $f(t)$ 在两峰之间形成明显 valley。

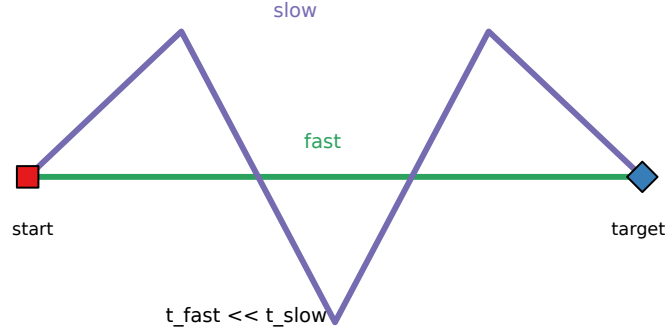


图 29: 双峰的概念示意图：fast/slow 两通道混合 + 时间尺度分离。

通道判据（用于 fast/slow 分类）

- A: 是否发生 x 方向 wrap-around (跨越周期边界); 无 wrap 为 fast, 发生 wrap 为 slow。
- B: 是否在命中前离开 corridor band ($y \in \{59, 60\}$); 保持在 band 内直到命中为 fast, 离开为 slow。
- C: 门穿越首次发生时间是否晚于 t_v ; 早穿门为 fast, 晚穿门为 slow。

三类候选的几何解释

- A: fast 为逆漂移短路, slow 为顺漂移绕行; 周期拓扑将“绕圈”变成天然慢通道。
- B: 贴边走廊提供快通道; x 周期边界 + 全局偏置提供绕行慢通道; 对照扫描得到 $L_{\min} = 6$ 。
- C: door + sticky 抬高穿门代价; 早穿门/短路为 fast, 晚穿门/绕行与 sticky 滞留为 slow; 最少 local bias sites 为 $n_{\min} = 0$ 。

periodic unwrapped 直观图 候选 A、B 与 C 的 periodic 机制通过展开图展示 (图 9、图 18 与图 27), 在两个 tile 中同时标注 target 的 image, 并给出短路距离 Dx_{short} 与绕行距离 Dx_{wrap} 。

粗略峰位预测 一维漂移速度的近似为 $v_x \approx q|g_x|/2$, 从而给出 $t_{\text{peak}} \approx \Delta x/v_x$ 的粗略估计。表 4 给出估计与数值峰位的对照 (仅用于直观解释)。

表中可见, 候选 B/C 的预测偏差更大, 主要由于走廊局部 bias、周期绕行以及 door/sticky 引入的有效漂移/等待时间修正; 该表仅用于量级直观解释。

三类候选的机制共性可总结为:

- A: 周期拓扑提供 wrap-around 慢通道; 逆偏置短路为快通道。

case	channel	Δx	t_{pred}	t_{peak}
A	fast (short)	2	8.3	6
A	slow (wrap)	58	241.7	232
B	fast (corridor)	8	80.0	33
B	slow (wrap)	52	520.0	473
C	fast (short)	20	100.0	88
C	slow (wrap)	40	200.0	500

表 4: 粗略峰位预测（基于 $v_x \approx q|g_x|/2$ ）与数值峰位对比。

- B: 贴边走廊提供快通道, x 周期边界与全局偏置提供绕行慢通道。
- C: door + sticky 抬高穿门代价; 早穿门为 fast, 晚穿门 (含 wrap-around 或 sticky/door 延迟) 为 slow。

7 边界条件的物理含义与保留价值

reflecting 更贴近有限容器或围墙区域的扩散/搜索问题: 概率守恒且不会“漏出系统”。

periodic 对应拓扑上环/环面或均匀介质的平铺近似, 现实中并不常见, 但可自然引入绕行慢通道, 便于产生时间尺度分离 (候选 A)。

mixed 仅在一个方向保留 wrap-around (如圆柱表面/条带结构), 兼顾可控性与理论可解析性 (候选 B 与 C)。

选择建议 若强调现实边界, 可采用纯反射走廊基线; 若强调双峰可视性, 可采用贴边走廊并在 x 方向引入周期边界。若强调最少 local bias, 候选 A 最简但较理想化; 若希望在有限墙域中仍保留可控绕行机制, 候选 C 更合适。

8 与参考文献的对应

- PhysRevE 102, 062124: 周期边界 + bias 会出现双峰 (1D 明确论述), 对应候选 A 与候选 C 的 wrap-around 通道。
- arXiv:2311.00464v2 Fig.3: 局部 bias、permeable barrier 与 sticky 的构造规则 (20% stay, 80/20 door, sticky factor 0.2) 作为候选 B/C 的实现参考。

9 数据与代码可得性

本文所用脚本与数据已整理在仓库 `reports/grid2d_bimodality/`。图形输出位于 `figures/`, 数值指标与中间结果保存在 `data/` 与 `outputs/`。本文 PDF 由 L^AT_EX 编译生成。需要复现时, 可运行主脚本并按上述目录结构获取对应图表与指标。

参考文献

- [1] S. Condamin et al., *Phys. Rev. E* **102**, 062124 (2020).
- [2] M. Abad et al., *arXiv:2311.00464v2* (2023).